Arenstein, Prof. Dr. Jos., Maschinenlehre für Ober-Realsch. 8°. [208 S.] Mit Atlas von 20 Kupfern in qu. Fol. 8 M. 40 Pf.

Brey ... tigsten Formeln d ... t 1 Kupfertafel. 8 ... 1 M. 60 Pf.

— — ... ier Darstellung, ... goniometrischer ... 1 M. 60 Pf.

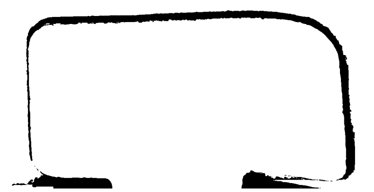
Cast ... stischer Systeme ... von Emil Hauff. ... lithogr. Tafeln. ... 20 M.

Disl ... ischen übersetzt ... itsche Ausgabe. ... 4 M. 80 Pf.

— — ... m Französischen ... fs-Fähnrich. Mit ... 4 M.

Engerth, Wilhelm Freih. von, das Schwimmthor zur Absperrung des Wiener Donaucanales. 4°. [VI. 178 S.] cart. 20 M.

Epstein, Dr. Th., Lehrer an der Realschule „Philanthropin" in Frankfurt a. M., Geonomie (mathematische Geographie), gestützt auf Beobachtung und elementare Berechnung. Für Lehrer, Studirende und zum Selbstunterricht. Mit 166 Holzschnitten und 18 Figurentafeln, wovon 12 mit Sternbildern auf blauem Grunde. gr. 8°. [XVI. 576 S.] 15 M.





Inneres Gleichgewicht

der

Pfeiler aus Metallconstruction

nach den Gesetzen der elastischen Deformation

von

L. Allievi

Civil-Ingenieur in Rom.

Vom Verfasser autorisirte Uebersetzung aus dem Italienischen

von

Richard Totz

Ingenieur.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Wien

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn

1888.

Einleitung.

I. Allgemeines.

Die Pfeiler mit Gitterwerk bestehen aus einem Systeme von guss- oder schmiedeeisernen Säulen, welche entweder vertical oder leicht geneigt in parallelen Paaren so angeordnet werden, dass der Grundriss ein Rechteck bildet; die Säulen sind untereinander durch ein eisernes Gitterwerk verbunden.

Die typischen Systeme sind:

a) Der ebene Pfeiler, aus zwei Säulen bestehend, welche entweder vertical oder nach oben convergirend angeordnet sind; wir werden denselben den einfachen Pfeiler (Wandpfeiler) nennen;

b) der prismatische und pyramidenförmige Pfeiler, aus vier Säulen bestehend, welche durch Gitterwerk an den Seitenflächen und durch innere Diagonalverstrebungen verbunden sind.

Ausserdem haben wir noch Beispiele von Pfeilern, welche aus sechs und acht Säulen bestehen.

Die Säulen sind am Fusse in eine gusseiserne Sohlplatte eingelassen, welche mit dem gemauerten Unterbau fest verankert wird, während die oberen Enden durch einen Rahmen oder Pfeilerkopf verbunden werden, auf welchem der Oberbau in gewöhnlicher Weise gesetzt wird.

Die typische Form der Gitterwerke ist das Andreas-Kreuz; in Bezug auf die Art der Beanspruchung der Constructionstheile bei Gitterwerken kann man zwei bestimmte Kategorien unterscheiden:

1. Gitterwerke aus Blech, den gewöhnlichen Gitterwerken der Blechträger ähnlich. Diese Gitterwerke kann man sich in den Knotenpunkten als gelenkig vorstellen, wobei der Widerstand gegen Biegung, welcher durch die Deformation des Systemes hervorgebracht wird, vernachlässigt ist.

2. Gitterwerke nach demselben geometrischen Schema, aber in den einzelnen Constructionstheilen verschieden zusammengesetzt, und zwar:

a) Mit Streben, oder besser, horizontalen Traversen, welche eingefügt und mit den Säulen fest verbunden sind;

b) mit relativ schwachen, gekreuzten Stangen, welche nur auf Zug beansprucht werden, und oft mit Vortheil künstlich gespannt werden können.

In der Folge werden wir uns fast ausschliesslich mit den Gitterpfeilern gewöhnlichen Systemes befassen, indem wir uns im Anhange auf eine allgemeine Behandlung des Studiums des Gleichgewichtes der einfachen verticalen Pfeiler mit fest eingefügten horizontalen Traversen beschränken.

Die so eingetheilten Pfeiler werden beansprucht:

1. Im verticalen Sinne: durch das Gewicht des Ueberbaues, der Verkehrslast und das Eigengewicht.

2. Im horizontalen Sinne:

a) Durch die Kraft der Reibung, welche in Folge der Ausdehnung des Oberbaues erzeugt wird;

b) durch den Winddruck, welcher sowohl auf den Ueberbau wie auf den Pfeiler selbst wirkt.

3. Durch ein auf den Pfeilerkopf wirkendes Biegungsmoment: in Folge der Stützung oder eventuellen Befestigung des Ueberbaues auf einem Theile des Pfeilerkopfes.

Das Studium des Gleichgewichtes solcher Systeme, dieselben in obiger Weise beansprucht vorausgesetzt, ist augenscheinlich sehr complicirt, und die allgemein angewandte Methode der Vereinfachung besteht darin, dass man sich auf das Studium des einfachen Pfeilers beschränkt und andere Pfeiler sich aus Säulenpaaren zusammengesetzt vorstellt.

Bei Annahme des Gitterwerkes in der Form des Andreas-Kreuzes (das gewöhnlichste Schema, auf welches sich auch complicirtere Gitterwerke reduciren lassen) wurde das Studium des inneren Gleichgewichtes des einfachen Pfeilers mittelst der statischen Methode durchgeführt, indem man das System als gelenkig betrachtete und durch eine der folgenden Annahmen statisch bestimmbar machte, z. B.:

Nur ein Diagonalstab sei beansprucht, und zwar auf Zug;

beide seien gleich beansprucht, der eine auf Zug, der andere auf Druck etc.

Auch complicirtere ebene oder körperliche Systeme wurden mit obigen Annahmen behandelt. Diese Methoden sind in der Abhandlung von Nordling und in den Vorlesungen von Winkler[1]) angewendet, die einzigen mir bekannten Schriften, welche den Gegenstand in eingehender Weise behandeln.

Zahlreiche Einwendungen kann man gegen die Zulässigkeit irgend einer der obigen Hypothesen erheben, welche die Aufgabe vereinfachen und die Lösung mittelst statischer Methoden ermöglichen; der Haupteinwand ist aber, dass unter keiner Voraussetzung solche Methoden auch nur annähernd dem Einflusse Rechnung tragen, welchen die verticale Beanspruchung auf das Gitterwerk hat, und ferner den Kräften, welche in Folge der Deformation des Systemes erzeugt werden.

Ein Pfeiler aus Eisenconstruction kann wohl seiner geometrischen Form nach mit einem Brückenträger verglichen werden, für dessen Gleichgewichtsberechnung die statische Methode als vollkommen giltig angenommen werden kann; aber bei dem Brückenträger erfolgt die Beanspruchung hauptsächlich auf Biegung, dagegen bei dem Pfeiler auf Zerknickung, und dadurch wird jede statische Analogie zwischen den beiden Systemen aufgehoben.

---

[1]) In der Abhandlung von Nordling („Annales des ponts et chaussées", 1864), welche reich an constructiven Angaben und wegen des technischen Namens des Autors werthvoll ist, wird die Unzulänglichkeit der statischen Methoden für das Studium der Inanspruchnahme bekräftigt. Der Autor beginnt darin in richtiger Weise mit dem Studium der Vertheilung der Drücke auf die Säulen, wie selbe durch das Gitterwerk bewirkt wird; aber nachdem er einen falschen Weg einschlägt, indem er als Unbekannte die Spannungen statt der elastischen Verschiebungen einführt, bleibt er vor der scheinbaren Complicirtheit der Formeln stehen.

Die Vorlesungen von Winkler („Theorie der Gitterpfeiler") behandeln speciell die Fachwerke und Netzwerke, wobei sie sich fast ausschliesslich auf statische Untersuchungen beschränken. Mit Zuhilfenahme einiger Hypothesen leitet er statische Elementarformeln ab, und von letzteren graphische Constructionen, welche immer durch ein einfaches Diagramm ersetzt werden können. Vom Studium des Netzwerkes geht er auf die Behandlung des Andreas-Kreuzes über, indem er die erhaltenen Formeln mit jenen der elastischen Verschiebungen eines Systemes von sechs gelenkigen Stangen eines Viereckes combinirt, eine gemischte Methode, welche nicht ganz zulässig ist.

Im zweiten Falle kommt bei Bestimmung der Kräfte, welche auf die Constructionstheile des Gitterwerkes wirken, ausschliesslich die Deformation des Systemes in Betracht zu ziehen, und die wirkliche Unbekannte ist, wie Nordling sich so treffend ausdrückt: „Le travail pour ainsi dire occulte, que l'étrésillonage des palées a à accomplir pour empêcher les piles de flamber sous la seule action de la charge verticale, travail qui jusqu'à présent échappe au calcul."

Die Frage hat überdies für die Theorie und Praxis eine Tragweite, welche über die Grenzen des Studiums der Eisenpfeiler hinausgeht; sie umgreift die allgemeine Aufgabe des inneren Gleichgewichtes bei Systemen aus Andreas-Kreuzen hergestellt, welche bei Constructionen am häufigsten angewendet werden. Zur Lösung der Aufgabe bei Inanspruchnahme eines Systemes durch äussere Kräfte, welche dasselbe gleichzeitig zu biegen und zu zerknicken streben, sind die statischen Methoden unzulänglich, weil bei denselben die zweite Art von Beanspruchung vernachlässigt und für die erste Art der nicht immer richtige Vorgang eingeschlagen wird, dass man sich auf ein ebenes System reducirt, welches in den Knotenpunkten gelenkig und statisch bestimmt ist.

Ich beabsichtige für das Studium des Gleichgewichtes ähnlicher Systeme (auf den Fall mit zwei oder vier Säulen beschränkt) die Grundsätze der Deformirung elastischer Systeme und besonders die bekannte Methode der elastischen Verschiebungen anzuwenden, wobei es nicht überflüssig sein dürfte, in Bezug auf letztere einige Bemerkungen vorauszuschicken.

II. Methode der Verschiebungen.

Auf elementare Weise gelangt man zu dem Schlusse, dass ein System von n Punkten im geometrischen Sinne unverrückbar gemacht werden kann, wenn man bei einem Systeme von drei Dimensionen $3n-6$ in den Knotenpunkten gelenkige Stangen und bei einem ebenen Systeme $2n-3$ Stangen zur Anwendung bringt.

Das auf solche Weise erhaltene Gelenksystem ist statisch bestimmbar, d. h. die Kräfte, welche in Folge einer äusseren Beanspruchung auf die Stangen wirken, hängen einzig von der geometrischen Form des Systemes ab, welcher Art das Material oder der Querschnitt der Stangen auch immer sei.

Wenn aber die Zahl der Stangen $3n-6$ (oder $2n-3$) übersteigt, bleiben die Kräfte so lange unbestimmt, als man sich die Stangen als starr denkt, d. h. man kann sich eine unbegrenzte Zahl von inneren Kräftesystemen vorstellen, welche den äusseren Beanspruchungen das Gleichgewicht halten.

Das wirkliche Gleichgewicht eines gelenkigen Systemes ist in einem solchen Falle durch das Gesetz der elastischen Streckung der Stangen bestimmt und kann untersucht und zum Ausdrucke gebracht werden, wenn man die Längenänderungen der Stangen oder die Verschiebungen der Knotenpunkte (Veränderung der Coordinaten derselben) als Functionen derselben in die Rechnung als Hilfsunbekannte einführt.

Die Aufgabe lässt nur eine einzige Lösung zu.

In der That sind von den $3n$ (oder $2n$) Verschiebungen der Knotenpunkte 6 (oder 3) im gewissen Sinne willkürlich und bestimmen nur die Lage des deformirten Systemes im Raume.

Aus den $3n$ (oder $2n$) Gleichungen für das Gleichgewicht der Knotenpunkte in Functionen ihrer Verschiebungen umgewandelt, und aus den 6 (oder 3) Bedingungen für das Gleichgewicht der äusseren Kräfte können $3n-6$ (oder $2n-3$) Gleichungen abgeleitet werden, welche zur Bestimmung der $3n-6$ (oder $2n-3$) unbekannten Verschiebungen genügen.

Diese Methode ist auch für das Studium des Gleichgewichtes eines Systemes anwendbar, welches aus continuirlichen, elastischen Körpern besteht, die durch elastische Stangen verbunden sind; wie z. B. bei einem Pfeiler aus Eisenconstruction.

Die Resultirende R der inneren Kräfte der in einem Knotenpunkte zusammenlaufenden Stangen wirkt auf das Gleichgewicht des Körpers nach der Deformation wie eine äussere Kraft. Das Studium des Gleichgewichtes des Körpers mit den passenden Formeln gibt das Gesetz der Deformation in Functionen der äusseren Kräfte und der Resultirenden R, welche durch die inneren Kräfte der Stangen, d. h. in Functionen der Verschiebungen, ausgedrückt werden können. Man erhält auf diese Weise eine Reihe von Gleichungen, in welchen nur die Verschiebungen unbekannt sind und die im Vereine mit den anderen Gleichgewichts-

bedingungen des Systemes zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungen ausreichend sind.

Wenn man im Systeme feste Knotenpunkte hat, so wird man einfach die Verschiebungen dieser Knotenpunkte Null setzen und die Gleichgewichtsgleichungen nicht aufschreiben. Mit der Methode der Verschiebungen sind keine weiteren Annahmen bezüglich der Reaction der Stützpunkte nöthig, dieselben sind bestimmt durch die gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Resultirende der inneren Kräfte der Stangen, welche in jedem Stützpunkte zusammenlaufen.

Eine weitere Bemerkung ist noch bezüglich der Annäherung der Methode nothwendig.

Die Gleichungen für das Gleichgewicht der Knotenpunkte, in strenger Form geschrieben, würden den Cosinus der Winkel enthalten, welche die Achsen der Stangen mit den Coordinatenachsen nach der Deformation einschliessen; der Cosinus dieser Winkel ist aber eine Function der schliesslichen Coordinaten der Knotenpunkte, d. h. ihrer Verschiebungen. Nimmt man nun als Gesetz der Elasticität das gewöhnliche Gesetz der Proportion an, so würden die strengen Gleichungen des Gleichgewichtes, in Functionen der Verschiebungen transformirt, dieselben in der zweiten und dritten Potenz enthalten, und in dieser Form für die praktische Anwendung nicht brauchbar sein.

Es ist deshalb passender, bei Annahme von sehr geringen Deformationen lineare Gleichungen aufzustellen, wobei man die höheren Potenzen der Verschiebungen vernachlässigt, oder mit anderen Worten man substituirt für den Cosinus der Winkel nach der Deformation den Cosinus der ursprünglichen Winkel.

Die Näherungsweise der nach der Methode der Verschiebungen erhaltenen linearen Gleichungen erklärt einige scheinbare statische Widersprüche, worauf wir an passender Stelle die Aufmerksamkeit des Lesers lenken werden.

Die Lösung dieser Systeme von Gleichungen ist die einzige Schwierigkeit bei Anwendung dieser Methode.

Wenn man von den directen numerischen Lösungen absieht, welche, ganz besonders einfache Fälle ausgenommen, zu mühsamen, wenn nicht undurchführbaren Rechnungen führen, und dagegen die linearen Systeme

in ihrer algebraischen Allgemeinheit beibehält, so kann man mit Vortheil auf analytischem Wege die Transformation in einfachere Systeme versuchen, wodurch die Gesetze der Deformation klar werden oder eventuell die Möglichkeit sich zeigt, die Lösung durch explicite Ausdrücke der unbekannten Verschiebungen zu erreichen.

Von diesem analytischen Wege werden die Anwendungen, welche wir von dieser Methode bei den zu untersuchenden Aufgaben machen werden, eine klare Idee geben.

III. Einfluss der Continuität des Trägers auf die Art der Beanspruchung des Pfeilers.

Wir wollen jetzt einige Vorfragen lösen, welche auf den Einfluss der Continuität des Trägers auf die Art der Beanspruchung des Pfeilers Bezug haben, und zwar:

A. Die Wirkung einer eventuellen festen Verbindung des Trägers mit einem oder allen Pfeilern.

B. Den Einfluss der Continuität des Trägers auf die Vertheilung des Winddruckes zwischen den Pfeilerköpfen.

***A*. Einfluss der festen Verbindung. — Theorie des continuirlichen Balkens, auf elastischen Pfeilern befestigt.**

Unter der Annahme einer Befestigung des Trägers auf den Pfeilerköpfen kann man die Biegungsmomente bei den Stützpunkten nicht mehr nach den bekannten Formeln des continuirlichen, frei aufliegenden Trägers bestimmen; indem sich der Träger in Folge der Beanspruchung durch die Verkehrslast durchbiegt, zieht er den Pfeiler mit sich und deformirt dessen Achse, dadurch wird im Pfeiler eine Reaction hervorgerufen, und zwar ein Moment N_m, welches der Durchbiegung des Trägers entgegenstrebt, und eine Horizontalkraft Y_m, welche eine Compression oder eventuelle longitudinale Verschiebung des Trägers hervorruft. (Fig. 1, Taf. 1.)

Durch das Biegungsmoment N_m des Pfeilers wird nach den Gesetzen der Biegungsmomente eines Trägers an den Stützpunkten eine Unstetigkeit hervorgerufen. (Siehe graphische Darstellung der Momente Fig. 2.)

Bezeichnen wir mit $M_m^{\cdot}$, $M_m^{\cdot\cdot}$ die Biegungsmomente des Trägers rechts und links von dem Querschnitte, welcher mit dem m^{ten} Pfeiler fest verbunden ist, und ferner N_m als positiv, wenn der Sinn der Drehung nach rechts erfolgt, so erhalten wir:

$$N_m = M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}.$$

Zählen wir die Stützpunkte von rechts nach links und behalten wir die gewöhnlichen Bezeichnungen für den continuirlichen Träger bei, so benennen wir:

p_m — die specifische Belastung des m^{ten} Feldes,
l_m — die Länge des m^{ten} Feldes,
h_m — die Höhe des m^{ten} Pfeilers,
I — das Trägheitsmoment des Trägers,
Ω_m, J_m — den Querschnitt des m^{ten} Pfeilers und sein Trägheitsmoment in Bezug auf Biegung in der Verticalebene, welche durch die Achse des Trägers geht.
Z_m — Verticalkraft auf dem m^{ten} Pfeiler,
Y_m — Horizontalkraft, in der Richtung der Achse des Trägers, auf den Pfeilerkopf des m^{ten} Pfeilers,
z_m — verticale Senkung des Pfeilerkopfes am m^{ten} Pfeiler,
y_m — horizontale Verschiebung des Pfeilerkopfes, in Folge der Zusammendrückung und Verschiebung des Trägers,
t_m — Drehungswinkel des befestigten Querschnittes, welcher dem Träger und dem m^{ten} Pfeiler gemeinsam ist; denselben Drehungssinn wie bei N_m als positiv angenommen.
E, E_1 — der respective Elasticitätsmodul des Trägers und Pfeilers.

Sehen wir von der Länge des befestigten Theiles ab, d. h. nehmen wir an, es sei nur ein Querschnitt des Trägers mit der Achse des Pfeilers fest verbunden, so geben bekannte Formeln:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} t_m = -\dfrac{l_m}{6EI}\left(M_{m-1}^{\cdot\cdot} + 2M_m^{\cdot} - \dfrac{1}{4}p_m l^2_m\right) + \dfrac{z_{m-1} - z_m}{l_m} \\[2ex] t_m = +\dfrac{l_{m+1}}{6EI}\left(2M_m^{\cdot\cdot} + M_{m+1}^{\cdot} - \dfrac{1}{4}p_{m+1} l^2_{m+1}\right) + \dfrac{z_m - z_{m+1}}{l_{m+1}}. \end{cases}$$

Betrachtet man den m^{ten} Pfeiler als einen festen Körper[1]) mit dem constanten Trägheitsmomente J_m, welcher an der Basis fest eingespannt ist, und nimmt man ferner an, dass das freie Ende von einem Momente $M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}$ und einer Kraft Y_m beansprucht werde, derart, dass sich das freie Ende um die Grösse y_m im entgegengesetzten Sinne zu Y_m bewegt, während sich die Achse so deformirt, dass sich der äusserste Querschnitt um den Winkel t_m dreht (Fig. 3), so erhält man die Gleichungen:

$$\text{(B)} \qquad t_m = \frac{h_m}{E_1 J_m}\left(M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot} - \frac{1}{2} Y_m h_m\right)$$

$$\text{(C)} \qquad Y_m = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}}{h_m} - \frac{3 E_1 J_m}{h^3_m} \cdot y_m.$$

Eliminirt man t_m und Y_m aus den Gleichungen A, B, C, so ergeben sich die beiden typischen allgemeinen Gleichungen für den continuirlichen Träger, welcher auf elastischen Pfeilern befestigt ist.

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} &\frac{l_m}{6EI}\left(M_{m-1}^{\cdot\cdot} + 2 M_m^{\cdot} - \frac{1}{4} p_m l^2_m\right) + \frac{h_m}{4E_1 J_m}\left(M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}\right) + \\ &\qquad\qquad + \frac{3}{2} \cdot \frac{y_m}{h_m} - \frac{z_{m-1} - z_m}{l_m} = 0 \\ &\frac{l_{m+1}}{6EI}\left(2 M_m^{\cdot\cdot} + M_{m+1}^{\cdot} - \frac{1}{4} p_{m+1} l^2_{m+1}\right) - \frac{h_m}{4E_1 J_m}\left(M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}\right) - \\ &\qquad\qquad - \frac{3}{2} \cdot \frac{y_m}{h_m} + \frac{z_m - z_{m+1}}{l_{m+1}} = 0. \end{aligned}$$

Ist der Träger auf dem Pfeiler einfach gestützt, so hat man für den Stützpunkt:

$$M_m^{\cdot} = M_m^{\cdot\cdot} = M_m$$

und die beiden typischen Gleichungen (D) werden durch eine einzige ersetzt, die man durch Summation bei Berücksichtigung obiger Bedingung erhält.

---

[1]) Das Trägheitsmoment J_m ist im Allgemeinen variabel, gegen die Basis wachsend; die Einführung dieser Bedingung bei einem Pfeiler aus geraden, convergirenden Säulen bietet keine andere Schwierigkeit, als die Zuhilfenahme einfacher, aber langwieriger Integrationen.

Die Gleichungen (D) enthalten die unbekannten Momente $M^{\cdot}$, $M^{\cdot\cdot}$ und die unbekannten Verschiebungen y, z.

Die Verticalverschiebungen lassen sich durch folgende Gleichungen eliminiren:

$$z_m = \frac{Z_m h_m}{E_1 \Omega_m} \tag{E}$$

$$Z_m = \frac{-M^{\cdot\cdot}_{m-1} + M^{\cdot}_m}{l_m} + \frac{M^{\cdot\cdot}_m - M^{\cdot}_{m+1}}{l_{m+1}} + \frac{1}{2}\left(p_m l_m + p_{m+1} l_{m+1}\right). \tag{F}$$

Nach Durchführung der Substitution enthalten die typischen Gleichungen (D) die Momente:

$$M^{\cdot\cdot}_{m-2} \; M^{\cdot}_{m-1} \; M^{\cdot\cdot}_{m-1} \; M^{\cdot}_m \; M^{\cdot\cdot}_m \; M^{\cdot}_{m+1}$$

$$M^{\cdot\cdot}_{m-1} \; M^{\cdot}_m \; M^{\cdot\cdot}_m \; M^{\cdot}_{m+1} \; M^{\cdot\cdot}_{m+1} \; M^{\cdot}_{m+2}$$

und die horizontalen Verschiebungen y, deren Eliminirung oder Bestimmung durch Einführung der Bedingungen für das horizontale Gleichgewicht des Trägers erfolgen kann. Im Folgenden geben wir verschiedene Methoden für die Lösung des Problems:

1. Angenäherte Lösung.

Das System der Gleichungen (D) kann annäherungsweise gelöst werden, wenn man nur die Verschiebung, nicht aber die longitudinalen Deformationen des Trägers in Rechnung bringt, indem man setzt:

$$y_m = y_0 = \text{Constante.}$$

Mit dieser Annahme erhält man aus (D) die Momente $M^{\cdot}_m$ und $M^{\cdot\cdot}_m$ und aus (C) die Horizontal-Reactionen Y_m in linearen Functionen von y_0 ausgedrückt, welches man mittelst der Bedingung für das horizontale Gleichgewicht des Trägers bestimmt.

Hierbei lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Stützen, auf welchen der Träger einfach aufliegt, sind starr (Endpfeiler—Mittelpfeiler aus Mauerwerk).

In diesem Falle führt die Bedingung für das horizontale Gleichgewicht:

$$f \Sigma Z_i - \Sigma Y_m = 0 \tag{G}$$

worin Z_i die Reactionen auf den Stützen angibt (durch [F] in linearen Functionen von y_0 ausgedrückt) zu einer linearen Gleichung, mittelst welcher man die Verschiebung y_0 bestimmen kann, vorausgesetzt, dass

die Möglichkeit derselben untersucht wurde; dies geschieht, indem man in (G) $y_0 = 0$ setzt und f bestimmt, dessen Werth noch den für den Reibungs-Coëfficienten angenommenen Maximalwerth übersteigen muss, damit eine Verschiebung stattfinden kann.

b) Alle Stützen, auf welchen der Träger einfach aufliegt, sind biegsam. (Pfeiler aus Eisenconstruction.)

In diesem zweiten Falle ist die Möglichkeit der Verschiebung auch ohne Gleiten auf den Stützen vorhanden, weil der Träger einfach durch Reibung die biegsamen Stützen oder Pfeiler mitnehmen kann; die Horizontal-Reaction auf den Pfeilerkopf ist dann:

$$\frac{3 E_1 J_i}{h_i^3} \times y_0,$$

wenigstens so lange y_0 der Bedingung entspricht:

$$y_0 < \frac{f Z_i h_i^3}{3 E_1 J_i}.$$

Die Gleichung für das horizontale Gleichgewicht des Trägers ergibt sich dann in der Form:

$$(G') \qquad f \Sigma Z_i + 3 E_1 y_0 \Sigma \frac{J_i}{h_i^3} - \Sigma Y_m = 0.$$

Bei Anwendung von (G') muss man einige Versuche machen, um (mittelst der obigen Bedingung) zu bestimmen, welche von den Horizontal-Reactionen der elastischen Pfeiler mit einfach aufliegendem Träger unter das zweite Summationszeichen Σ und welche unter das erste zu setzen sind, d. h. welche von den Pfeilern dem Träger bei seiner Verschiebung folgen, so lange, bis der Pfeilerkopf um y_0 verrückt ist, und bei welchen nach einer theilweisen Biegung ein Gleiten stattfindet.

2. Strenge Lösung.

Bezeichnet man mit y_0 die Verschiebung des Endes o des Trägers, so ergibt sich nach den Gesetzen für die Deformation des Trägers, derselbe als elastischer Körper betrachtet und von den achsialen Kräften Y_m und $f Z_i$ beansprucht, eine Reihe von Gleichungen zwischen:

$$Y_m, \; Z_i, \; y_m - y_0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Y_m und Z_i mittelst (C) und (F), so ergeben sich daraus die y_m in linearen Functionen von:

$$M_m, \quad M_m^{\cdot}, \quad M_m^{\cdot\cdot}, \quad y_0$$

ausgedrückt, und wenn man dieselben in die Gleichungen (D) einsetzt, so erhält man mit demselben Verfahren wie früher y_0. Dieser Vorgang ist aber, besonders einfache Fälle ausgenommen, von einer undurchführbaren Complication.

B. **Wirkung des Windes. — Theorie des continuirlichen Trägers, welcher auf elastischen Consolen befestigt ist.**

In Folge des Winddruckes werden die Pfeiler beansprucht:

a) Durch eine Horizontalkraft, welche wir der ganzen Höhe nach gleichförmig vertheilt annehmen werden;

b) durch eine (unbekannte) Kraft, welche am Pfeilerkopfe angreift und durch den Winddruck auf den Träger hervorgebracht wird.

Zur Bestimmung der Kraft *b*) muss man die Deformation des ganzen Systemes in Rechnung ziehen, d. h. den Träger in Bezug auf die horizontalen Beanspruchungen als continuirlich und auf Stützen in verschiedener Höhe liegend betrachten, wobei die Niveau-Unterschiede der Stützpunkte durch die Biegungen der Pfeiler bestimmt sind. Der Träger befindet sich, kurz gesagt, unter denselben Bedingungen wie ein continuirlicher, auf horizontalen, elastischen Consolen befestigter oder gestützter Balken, wobei das ganze System durch eine gleichförmig vertheilte Last beansprucht ist. (Fig. 4.)

Bezeichnen wir mit q und q_1 die specifischen Belastungen des Trägers und der Pfeiler, so wird sich unter der Wirkung von q und q_1 das ganze System deformiren und die auf Biegung und Torsion beanspruchten Pfeiler mit einem Momente zurückwirken, welches eine Unstetigkeit der horizontalen Biegungsmomente des Trägers herbeiführt. (Fig. 5.) Die Aufgabe wird in analoger Weise wie früher gelöst.

Behalten wir alle früheren Bezeichnungen bei, so beziehen sich:

$$I, \; t_m, \; M_m^{\cdot}, \; M_m^{\cdot\cdot}$$

auf die Biegungen des Trägers in einer horizontalen Ebene und J_m auf die seitlichen Biegungen der Pfeiler.

Nennen wir ferner:

X_m — die unbekannte Horizontal-Reaction auf den Pfeilerkopf des m^{ten} Pfeilers,

x_m — die seitliche Verrückung desselben Pfeilerkopfes,

J_μ — das polare Trägheitsmoment des m^{ten} Pfeilers.

E_2 — den Elasticitätsmodul für Torsion des Pfeilers.

Aus den Formeln für die Torsion und Biegung eines von $M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}$, X_m, q_1 beanspruchten Pfeilers kann man ableiten:

$$(\text{H}) \qquad t_m = \frac{h_m}{E_2 J_\mu}\left(M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}\right)$$

$$(\text{I}) \qquad x_m = \frac{h^3_m}{E_1 J_m}\left(\frac{1}{3} X_m + \frac{1}{8} q_1 h_m\right)$$

Ferner ist:

$$(\text{F}') \qquad X_m = \frac{-M_{m-1}^{\cdot\cdot} + M_m^{\cdot}}{l_m} + \frac{M_m^{\cdot\cdot} - M_{m+1}^{\cdot}}{l_{m+1}} + \frac{1}{2} q (l_m + l_{m+1}).$$

Transformiren wir die Gleichung (A), indem wir x statt z, $p_m = p_{m+1} = q$ setzen, und eliminiren wir t_m durch (H), so erhalten wir die beiden typischen Gleichungen für den continuirlichen Träger, welcher auf horizontalen elastischen Consolen befestigt ist:

$$(\text{L}) \qquad \begin{cases} \dfrac{l_m}{6EI}\left(M_{m-1}^{\cdot\cdot} + 2 M_m^{\cdot} - \dfrac{1}{4} q l^2_m\right) + \dfrac{h_m}{E_2 J_\mu}\left(M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}\right) - \\ \qquad\qquad - \dfrac{x_{m-1} - x_m}{l_m} = 0 \\ \dfrac{l_{m+1}}{6EI}\left(2 M_m^{\cdot\cdot} + M_{m+1}^{\cdot} - \dfrac{1}{4} q l^2_{m+1}\right) - \dfrac{h_m}{E_2 J_\mu}\left(M_m^{\cdot} - M_m^{\cdot\cdot}\right) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{x_m - x_{m+1}}{l_{m+1}} = 0 \end{cases}$$

worin der Werth x aus den Gleichungen (I) und (F'_2) substituirt werden kann.

Vernachlässigt man die Torsion des Pfeilers und nimmt den Träger, wie in den gewöhnlichen Fällen, als einfach aufliegend an, setzt: $M_m^{\cdot} = M_m^{\cdot\cdot} = M_m$, so werden die Gleichungen (L) ersetzt durch:

(M) $$l_m M_{m-1} + 2(l_m + l_{m+1}) M_m + l_{m+1} M_{m+1} -$$
$$- 6EI\left(\frac{x_{m-1} - x_m}{l_m} - \frac{x_m - x_{m+1}}{l_{m+1}}\right) = \frac{1}{4} q (l^3_m + l^3_{m+1})$$

worin, bei Inbetrachtziehung von (I), fünf aufeinander folgende Momente enthalten sind.

Bei gleichen Feldern kann man ein System von Gleichungen aufstellen, wobei jede fünf aufeinander folgende x oder X, die Hauptunbekannten der Aufgabe, enthält.

Bei dieser Annahme werden die Gleichungen (F′) und (M):

$$- M_{m-1} + 2 M_m - M_{m+1} = X_m l - q l^2$$
$$M_{m-1} + 4 M_m + M_{m+1} = \frac{6EI}{l^2}(x_{m-1} - 2x_m + x_{m+1}) + \frac{1}{2} q l^2$$

und geben summirt:

(N) $$M_m = \frac{X_m l}{6} + \frac{EI}{l^2}(x_{m-1} - 2x_m + x_{m+1}) - \frac{1}{12} q l^2.$$

Dieser Ausdruck in eine der beiden obigen Gleichungen eingesetzt, ergibt:

(O) $$X_{m-1} + 4X_m + X_{m+1} =$$
$$= \frac{6EI}{l^3}(- x_{m-2} + 4x_{m-1} - 6x_m + 4x_{m+1} - x_{m+2}) + 6ql.$$

Aus dieser Gleichung kann man jetzt x oder X mit Zuhilfenahme von (I) eliminiren und erhält die allgemeine Gleichung, welche fünf aufeinander folgende X oder x enthält.

Sind h und J für alle Pfeiler gleich, so ergibt sich zwischen den X eine Gleichung von folgender Form:

$$\alpha X_{m-2} + (1 - 4\alpha) X_{m-1} + (4 + 6\alpha) X_m + (1 - 4\alpha) X_{m+1} + \alpha X_{m+2} = 6ql$$

worin:

$$\alpha = 2 \frac{E}{E_1} \cdot \frac{I}{J} \cdot \frac{h^3}{l^3}$$

und genügt wird durch:

$$X = ql.$$

IV. Allgemeine Formeln.

Bei der Behandlung des inneren Gleichgewichtes der Pfeiler werden wir zum Studium der verschiedenen Fälle von Biegung der Säulen, letztere als continuirliche Körper betrachtet, die Gleichungen des continuirlichen Trägers anwenden, welcher auf Stützpunkten von verschiedener Höhenlage aufruht (M und O). Geben wir daher zuerst in allgemeiner Form die erwähnten Systeme von Gleichungen für einen continuirlichen Träger, welcher an den Enden fest eingespannt ist (wie dies bei den Säulen der Pfeiler der Fall ist), da wir die erwähnten Systeme in dieser allgemeinen Form bei den folgenden Untersuchungen verwenden werden.

Behalten wir die zuletzt angenommenen Bezeichnungen bei und setzen wir voraus, dass die beiden äussersten Querschnitte, mit o und n bezeichnet, auf welche die Momente M_0 und M_n wirken, sich um die Winkel t_0 und t_n drehen, während die äussersten Stützen einer Einsenkung von x_0 und x_n unterliegen. Das unter dieser Annahme aus (A) in vollständiger Form erhaltene System (M) ist aus $n+1$ Gleichungen zusammengesetzt und lässt sich in folgender Form schreiben:

$$t_0 - \frac{x_0 - x_1}{l_1} =$$

$$= \frac{1}{6EI}\left(2\,l_1 M_0 + l_1 M_1 - \frac{1}{4}\,q l^3_1\right)$$

. . . .

(M) $$\frac{x_{m-1} - x_m}{l_m} - \frac{x_m - x_{m+1}}{l_{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{6EI}\left(l_m M_{m-1} + 2\,(l_m + l_{m+1})\,M_m + l_{m+1} M_{m+1} - \frac{1}{4}\,q\,(l^3_m + l^3_{m+1})\right)$$

. . . .

$$\frac{x_{n-1} - x_n}{l_n} - t_n =$$

$$= \frac{1}{6EI}\left(l_n M_{n-1} + 2\,l_n M_n - \frac{1}{4}\,q\,l^3_n\right).$$

Wenn man die Felder als gleich vorausgesetzt, M_0 aus den beiden ersten und M_n aus den beiden letzten Gleichungen dieses Systemes eliminirt, und für die übrig bleibenden M_m den Ausdruck (N) einsetzt, welcher nach der Art der Auffindung offenbar für die $n-1$ Zwischenstützen anwendbar ist, so erhält man ein System von $n-1$ Gleichungen:

$$7X_1 + 2X_2 =$$
$$= \frac{6EI}{l^3}(11x_0 - 18x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 6t_0 l) + 9ql$$

. . . .

$$\text{(o)} \qquad X_{m-1} + 4X_m + X_{m+1} =$$
$$= \frac{6EI}{l^3}(-x_{m-2} + 4x_{m-1} - 6x_m + 4x_{m+1} - x_{m+2}) + 6ql$$

. . . .

$$2X_{n-2} + 7X_{n-1} =$$
$$= \frac{6EI}{l^3}(6t_n l - 2x_{n-3} + 9x_{n-2} - 18x_{n-1} + 11x_n) + 9ql.$$

Zur Anwendung dieser Systeme von Gleichungen in den folgenden Untersuchungen erinnern wir uns, ein horizontaler, continuirlicher Träger und die Belastung q vertical nach abwärts wirkend vorausgesetzt:

a) Die Stützen sind bezeichnet von der äussersten rechts (o) nach der äussersten links (n);

b) die Werthe x werden nach abwärts als positiv gezählt, also in demselben Sinne wie q;

c) die Winkel t_0 und t_n werden im Sinne einer Drehung nach rechts gezählt, also wie M_0.

V. Einleitende Bemerkungen.

Die typischen Systeme der Pfeiler aus zwei oder vier Säulen bilden ausschliesslich den Gegenstand der folgenden Ausführungen. Die Methoden und Resultate, welche dabei entwickelt werden, zeigen auch den Weg für das Studium complicirterer Systeme.

Wir werden der Reihe nach betrachten:

I. Die verticalen Säulenpfeiler mit gleichen Feldern:

1. Der einfache Wandpfeiler.

2. Der prismatische Pfeiler mit rechteckigem Grundrisse.

Hiebei setzen wir die geometrischen Elemente des Pfeilers bei den verschiedenen Feldern als gleich voraus.

II. Pfeiler aus convergirenden Säulen:

1. Der einfache Wandpfeiler.

2. Der pyramidale Pfeiler mit rechteckigem Grundrisse.

In diesem zweiten Falle nehmen wir an, dass die geometrischen Elemente von Feld zu Feld variabel seien.

Die unter I. angeführten Systeme bilden offenbar nur einen speciellen Fall der II. Systeme; wir haben jedoch eine Trennung der Behandlung vorgezogen, einerseits wegen der grösseren Klarheit in der Anordnung, andererseits weil die Regeln und Lösungen des speciellen Falles I nur mit analoger Annäherung auf den allgemeinen Fall II erweitert werden können und das Vorstudium der Systeme I uns bessere Gelegenheit gibt, das Gebiet von jenem mittelst Discussion der Formeln zu bestimmen.

Das Studium der Systeme unter II. besteht sodann nur in einer Verallgemeinerung der schon bekannten Formeln und Resultate.

Wir werden obige vier Fälle unter zwei Annahmen behandeln:

α) Mit gelenkigen Knotenpunkten.

Unter dieser Annahme werden wir die Pfeiler als ein System gelenkiger, elastischer Stangen betrachten, mit Ausnahme des Pfeilerkopfes, d. h. die oberste horizontale Traverse (bei den körperlichen Systemen: eine Ebene), welche wir als nicht deformirbar voraussetzen; die unteren Knotenpunkte denken wir uns fest.

β) Mit continuirlichen Säulen.

Hiebei betrachten wir den Pfeiler als ein System von zwei oder vier continuirlichen elastischen Körpern (die Säulen), welche an der Basisebene fest verankert und am oberen Ende durch einen nicht deformirbaren, beweglichen und prismatischen Körper (Pfeilerkopf) abgeschlossen

sind, während die Verbindung der Höhe nach durch elastische, in den Knotenpunkten gelenkige Streben erfolgt.

Die Annahme, dass sich der Pfeilerkopf nicht deformirt, ist für die Behandlung der Aufgabe von grosser Wichtigkeit und findet seine Begründung in den Dimensionen, welche man diesem Theile des Pfeilers gibt, welcher den Ueberbau unmittelbar zu tragen hat.

Wir werden für obige vier Fälle dieselben allgemeinen Annahmen für die Beanspruchung beibehalten, welche wir nach den Ursachen der Inanspruchnahme auseinander gesetzt haben, und zerlegen dieselben in folgende Elemente:

1. Eine verticale Kraft, welche auf das Centrum des Pfeilerkopfes wirkt (Gewicht des Ueberbaues und der Verkehrslast).

2. Ein Drehungsmoment, auf den Pfeilerkopf wirkend (in Folge der Befestigung oder Stützung des Ueberbaues auf einem Theile des Pfeilerkopfes).

Diese beiden ersten Elemente können durch verschieden grosse Verticalkräfte dargestellt werden, welche an zwei Endpunkten des Pfeilerkopfes wirken.

3. Eine horizontale Kraft, an dem Pfeilerkopfe wirkend (Wirkung des Winddruckes auf den Ueberbau. — Einfluss der Verschiebung des Ueberbaues).

4. Eine gleichbleibende verticale Kraft, welche mit einer symmetrisch vertheilten Intensität auf die Säulen wirkt (Eigengewicht).

5. Eine gleichförmig vertheilte horizontale Kraft, welche mit derselben Stärke und in demselben Sinne auf die zwei oder vier Säulen wirkt (Winddruck).

Bei der Betrachtung des einfachen Wandpfeilers setzen wir die Kräfte in der Ebene des Pfeilers wirkend voraus.

Bei den prismatischen und pyramidalen Pfeilern nehmen wir dagegen an, dass die Kräfte parallel zu einer Symmetrie-Ebene wirken und ihre Intensität symmetrisch in Bezug auf diese Ebene ist.

Die totale Inanspruchnahme eines Pfeilers aus vier Säulen kann thatsächlich als Resultirende zweier symmetrischer Beanspruchungen aufgefasst werden, wovon die eine parallel, die andere senkrecht auf

die Achse des Trägers wirkt; nach dem Principe der Kräftezerlegung (abhängig von der linearen Form des Systemes von Gleichungen, die zur Anwendung kommen) kann man dieselben trennen und einzeln studiren.

Alle folgenden Untersuchungen sind rein statischer Natur; wir werden die Pfeiler im Zustande des Gleichgewichtes betrachten, indem wir uns die Wirkung der äusseren Kräfte so vorstellen, dass kein dynamischer Effect hervorgebracht wird, womit alle, im Uebrigen wichtigen Fragen in Bezug auf die Schwingungen der Pfeiler ausgeschlossen bleiben.

Wir werden annehmen, dass ursprünglich[1]), d. h. wenn wir die äusseren Kräfte, welche den Pfeiler beanspruchen, weglassen, keine Spannungen in den Stangen vorhanden seien.

Wir werden aber gleichfalls voraussetzen, dass jede Stange thatsächlich mit jener Kraft beansprucht wird, welche ihrer Längenänderung entspricht, ohne eine eventuelle Biegung der Stangen durch Zusammendrückung zu berücksichtigen; die Möglichkeit dieser Biegung muss für jeden speciellen Fall untersucht werden[2]), nachdem selbe sowohl von den ursprünglich vorhandenen künstlichen Zugspannungen, als auch der besonderen Anordnung des Gitterwerkes abhängen und entweder ganz aufgehoben oder vermindert werden können.

---

[1]) Im anderen Falle ist das System von inneren Kräften die Resultirende des Systemes der ursprünglichen Spannungen und des Systemes von Spannungen, welche die äussere Beanspruchung im Pfeiler erzeugen würde, wenn man erstere gleich Null annimmt.

[2]) Wenn die Druckspannungen einer Stange, auf Grund der Längenänderung nach der Methode der Verschiebungen berechnet, die Grenze, über welche eine Biegung stattfindet, überschreiten, so kann man die Aufgabe des inneren Gleichgewichtes lösen, indem man in den Stangen die Maximalspannungen annimmt, welchen sie, ohne sich zu biegen, unterworfen werden können.

Erster Theil.

Verticale Säulenpfeiler.

I. Abschnitt.

Der einfache Pfeiler.

I. Capitel.

Bezeichnungen und Fundamental-Formeln.

§. 1. **Bezeichnungen.**

Das geometrische Schema dieses Systemes besteht aus zwei verticalen Säulen, welche durch ein Gitterwerk in Form eines Andreas-Kreuzes miteinander verbunden sind (Fig. 6, Taf. II).

Indem wir die Höhe der Felder, die Querschnitte der Säulen und der Stangen des Gitterwerkes in allen Feldern als gleich voraussetzen, bezeichnen wir die paarweisen Knotenpunkte von o, den obersten, bis n, den unteren festen Knotenpunkt, und nennen das m^{te} Feld jenes, welches zwischen den $m-1^{ten}$ und m^{ten} Knotenpunkten liegt; ferner unterscheiden wir mit einem Striche jene Symbole, welche sich auf die linke Säule, und mit zwei Strichen jene, welche sich auf die rechte Säule beziehen.

a — die constante Höhe eines Feldes;

b — die horizontale Entfernung der Achsen der Säulen, welche wir mit der Länge der horizontalen Stangen als gleich betrachten.

γ — der Winkel, welchen die geneigten Stangen mit der Verticalen einschliessen.

P′ P″ — die verticalen Belastungen, welche an den beiden Enden des Pfeilerkopfes wirken; dafür werden wir in der Folge die Belastung 2P, im Centrum angreifend, substituiren und das Moment M durch folgende Gleichungen bestimmen:

$2P = P' + P''$;

$M = (P'' - P')\frac{b}{2}$; M im Sinne einer Drehung nach rechts, als positiv bezeichnet;

$2p$ — das specifische Eigengewicht des Pfeilers, in den Säulen concentrirt;

$2Q$ — die auf den Pfeilerkopf wirkende Horizontalkraft;

$2q$ — die specifische Horizontalkraft, welche der ganzen Höhe nach auf den Pfeiler wirkt, auf die Säulen übertragen, wonach jede Säule mit der Kraft q beansprucht wird.

Q und q werden wir im Sinne von links nach rechts wirkend als positiv annehmen.

$\xi'_m \eta'_m$, $\xi''_m \eta''_m$ — die horizontalen und verticalen Verschiebungen der Knotenpunkte m' und m''; wobei η im Sinne nach unten und ξ in der Richtung der Verlängerung der horizontalen Stangen als positiv angenommen wird, d. h. ξ' nach links und ξ'' nach rechts[1]);

Ω — der gleichbleibende Querschnitt der Säulen, welchen wir beziehungsweise mit Ω' und Ω'' bezeichnen werden.

ω — der gleichbleibende Querschnitt der geneigten Stangen;

ϱ — „ „ „ „ horizontalen „

$[\Omega'_m]$, $[\Omega''_m]$ — die m^{ten} Säulentheile, $[\omega'_m]$, $[\omega''_m]$ — die m^{ten} Diagonalstangen, $[\varrho_m]$ — die m^{te} horizontale Stange,	dieselben Zeichen sollen auch für die Kräfte gelten, welche in den genannten Constructionstheilen wirken[2]);

X'_m X''_m — die horizontalen Componenten der Kräfte in den Stangen, welche in den Knotenpunkten m' und m'' zusammenlaufen, als positiv in demselben Sinne wie ξ' und ξ'' gezählt;

---

[1]) Diese verschiedenartige Bezeichnung von ξ' und ξ'', welche der im Allgemeinen gebrauchten Gleichförmigkeit der Bezeichnungsweise widerspricht, ist gewissermassen durch die geometrische Symmetrie des Systemes bedingt, welche alle diese Untersuchungen beherrscht, und ist, wie man sehen wird, durch die Resultate dieser Abhandlung vollkommen gerechtfertigt.

[2]) Hiebei ist angenommen, dass die Bezeichnungen die mittleren Kräfte für die Säulentheile angeben.

I, i — das Trägheitsmoment und der Trägheitsradius jeder Säule in Bezug auf Biegung in der Ebene des Pfeilers;

J, j — die analogen Grössen für den Pfeiler;

μ'_m, μ''_m — die Biegungsmomente in den Säulen bei den m^{ten} Knotenpunkten;

τ'_m, τ''_m — die abscheerenden Kräfte in den Säulen ober den m^{ten} Knotenpunkten;

E, E_1 — die Elasticitätsmodule für die Stangen des Gitterwerkes und für die Säulen.

In Bezug auf jede der beiden Säulen, dieselben als continuirliche feste Körper betrachtet, für welche wir die Formeln des continuirlichen Trägers auf Stützen in verschiedenen Höhen anwenden werden, setzen wir fest, dass für die Bezeichnung der Momente μ' und μ'', der abscheerenden Kräfte τ' und τ'', der Reactionen an den Knotenpunkten etc., bei vertical nach abwärts gerichteten Belastungen, wie in der allgemeinen Behandlung des continuirlichen Balkens angenommen wird, der Sinn der verticalen Richtung nach abwärts entspricht:

für die linke Säule Ω', von links nach rechts, also im Sinne von $+q$ oder $-\xi'$;

für die rechte Säule Ω'', von rechts nach links, also im Sinne von $-q$ oder $-\xi''$.

Schreiben wir die Kräfte in Functionen der Verschiebungen:

a) Für die Säulenstücke und Diagonalstangen als Drücke;

b) für die horizontalen Stangen als Züge,

so erhält man:

$$[\Omega'_m] = (\eta'_{m-1} - \eta'_m) \cdot \frac{E_1 \Omega}{a}$$

$$[\Omega''_m] = (\eta''_{m-1} - \eta''_m) \cdot \frac{E_1 \Omega}{a}$$

$$(1) \quad [\omega'_m] = [(\eta''_{m-1} - \eta'_m) \cos\gamma - (\xi''_{m-1} + \xi'_m) \sin\gamma] \cdot \frac{E\omega}{a} \cdot \cos\gamma$$

$$[\omega''_m] = [(\eta'_{m-1} - \eta''_m) \cos\gamma - (\xi'_{m-1} + \xi''_m) \sin\gamma] \cdot \frac{E\omega}{a} \cdot \cos\gamma$$

$$[\varrho_m] = (\xi'_m + \xi''_m) \cdot \frac{E\omega}{a} \cot\gamma.$$

§. 2. **Fundamental-Lehrsatz.**

Wir werden die äusseren Kräfte, welche den Pfeiler beanspruchen, nach zwei Systemen gruppiren:

A. Die verticalen, symmetrisch wirkenden Belastungen 2P und $2p$; wir werden dieselben System der Beanspruchung auf Zerknicken nennen und wählen dafür die Bezeichnung: [P].

B. Die horizontalen Kräfte und das Moment: 2Q, $2q$, M; wir werden diese System der Beanspruchung auf Umstürzen nennen und wählen die Bezeichnung: [Q].

Diese Trennung der äusseren Beanspruchungen in [P] und [Q] ist durch folgenden Lehrsatz bedingt:

I. Die Summen der homologen Verschiebungen der Knotenpunkte $m' m''$:

$$\xi'_m + \xi''_m, \qquad \eta'_m + \eta''_m$$

hängen nur von der Beanspruchung [P] *ab und sind unabhängig von* [Q].

II. Die Differenzen der homologen Verschiebungen:

$$\xi''_m - \xi'_m, \qquad \eta''_m - \eta'_m$$

hängen von der Beanspruchung [Q] *ab und sind unabhängig von* [P].

I. Die Richtigkeit des 1. Theiles des obigen Lehrsatzes zeigt sich, wenn man beachtet, wie die Summen der Gleichungen für das Gleichgewicht unabhängig von den äusseren Kräften, welche in der Beanspruchung [Q] erscheinen, hervorgehen; und ferner, wegen der vollkommen geometrischen Symmetrie des Pfeilers, enthalten dieselben, mittelst (1) transformirt, die Verschiebungen nur als Summen der homologen Verschiebungen und genügen, unabhängig von [Q], zur Bestimmung dieser Werthe.

Auf diese Art ist der allgemeine Vorgang bei der folgenden Abhandlung angedeutet, in welcher die Beanspruchungen [P] und [Q] als gleichzeitig wirkend vorausgesetzt sind. Mit dieser Abhandlung wird daher in strenger Weise die Richtigkeit des 1. Theiles des erwähnten Lehrsatzes nachgewiesen werden, weshalb wir uns nicht länger damit aufhalten.

II. Die Richtigkeit des 2. Theiles vom obigen Lehrsatze ist wegen der Symmetrie einleuchtend; in der That führt, die Beanspruchung [Q]

ausser Acht gelassen, die Symmetrie der durch [P] erzeugten Deformation zu:

$$\xi''_m - \xi'_m = 0 \qquad \eta''_m - \eta'_m = 0,$$

welches die Richtigkeit des Erwähnten bestätigt.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze kann man mit Zuhilfenahme von (1) und den allgemeinen Formeln des continuirlichen Trägers den Folgesatz ableiten:

I. Die Summen der homologen Spannungen, der homologen Biegungsmomente und die Spannungen der horizontalen Stangen:

$$[\Omega'_m] + [\Omega''_m], \quad [\omega'_m] + [\omega''_m], \quad \mu'_m + \mu''_m, \quad [\varrho_m]$$

hängen nur von der Beanspruchung [P] *ab und sind unabhängig von* [Q].

II. Die Differenzen der homologen Spannungen und der homologen Biegungsmomente:

$$[\Omega''_m] - [\Omega'_m], \quad [\omega''_m] - [\omega'_m], \quad \mu'_m - \mu''_m$$

hängen nur von der Beanspruchung [Q] *ab und sind unabhängig von* [P].

Trennen wir die Wirkung der Beanspruchungen, so können der obige Lehrsatz und Folgesatz auch in folgender Form gegeben werden:

I. Durch die Beanspruchung [P] *werden die Säulen nach gleichen, symmetrischen Curven deformirt, in den Säulentheilen und Diagonalstangen eines Feldes gleiche Druckspannungen und in den horizontalen Stangen Zugspannungen hervorgebracht.* (Fig. 7.)

II. Durch die Beanspruchung [Q] *werden die Säulen nach gleichen congruenten Curven deformirt, in den Säulentheilen und Diagonalstangen eines Feldes gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Spannungen und in den horizontalen Stangen keine Spannungen hervorgerufen.* (Fig. 8.)

Diese Ausführungen, welche auch auf Pfeiler mit vier Säulen ausgedehnt werden können, zeigen den allgemeinen Vorgang für das Studium des inneren Gleichgewichtes dieser Systeme, eine Methode, welche darin besteht, dass man getrennt die Summen, d. h. die Wirkung von [P], und die Differenzen, d. h. den Einfluss von [Q], der homologen Elemente bestimmt.

§. 3. Bezeichnungen.

Auf Grund des Lehrsatzes und Folgesatzes werden wir in der Folge die Bezeichnungen annehmen, wie selbe in der nachstehenden Uebersicht gegeben sind:

$$(2)\quad \begin{array}{ll} \xi'_m + \xi''_m = 2\,\xi_{mp} & \xi''_m - \xi'_m = 2\,\xi_{mq} \\ \eta'_m + \eta''_m = 2\,\eta_{mp} & \eta''_m - \eta'_m = 2\,\eta_{mq} \\ \mu'_m + \mu''_m = 2\,\mu_{mp} & \mu'_m - \mu''_m = 2\,\mu_{mq} \\ [\Omega'_m] + [\Omega''_m] = 2\,[\Omega_m]_p & [\Omega''_m] - [\Omega'_m] = 2\,[\Omega_m]_q \\ [\omega'_m] + [\omega''_m] = 2\,[\omega_m]_p & [\omega''_m] - [\omega'_m] = 2\,[\omega_m]_q \\ \multicolumn{2}{c}{X'_m + X''_m = 2\,X_{mp},} \end{array}$$

aus denen man ableitet:

$$(2')\quad \begin{array}{ll} \xi'_m = \xi_{mp} - \xi_{mq} & \xi''_m = \xi_{mp} + \xi_{mq} \\ \eta'_m = \eta_{mp} - \eta_{mq} & \eta''_m = \eta_{mp} + \eta_{mq} \\ \mu'_m = \mu_{mp} + \mu_{mq} & \mu''_m = \mu_{mp} - \mu_{mq} \\ [\Omega'_m] = [\Omega_m]_p - [\Omega_m]_q & [\Omega''_m] = [\Omega_m]_p + [\Omega_m]_q \\ [\omega'_m] = [\omega_m]_p - [\omega_m]_q & [\omega''_m] = [\omega_m]_p + [\omega_m]_q. \end{array}$$

Nach dem Fundamental-Lehrsatze wären daher die halben Summen:

$$\xi_{mp} \ldots\ldots [\Omega_m]_p \ldots \text{etc.}$$

die Componenten der Verschiebungen und der Spannungen in Folge der Beanspruchung [P]; und die halben Summen

$$\pm\, \xi_{mq} \ldots \pm [\Omega_m]_q \ldots\ldots \text{etc.}$$

wären dieselben Componenten in Folge der Beanspruchung [Q].

Wir setzen ferner:

$$(3)\quad \begin{array}{ll} O = E_1\,\Omega & \\ o = E\,\omega\cos^3\gamma & w = \dfrac{o}{O + o} \\ r = E\,\varrho\cot^3\gamma & u = \dfrac{Oo}{O + o} \end{array}$$

Die Grössen O, o, r, welche wir die reducirten Querschnitte nennen werden, sind bei der Behandlung der Aufgabe von grosser Wichtigkeit. Die statische Wirkung einer Stange ist thatsächlich durch den reducirten Querschnitt vollkommen bestimmt, nämlich alle constanten Coëfficienten, die in den Formeln erscheinen, welche die Gesetze

der Deformation ausdrücken, durch die das innere Gleichgewicht hergestellt wird, sind sehr einfache Functionen der reducirten Querschnitte.

Dieses Princip verallgemeinert gilt auch, wie wir sehen werden, für complicirtere Systeme.

II. Capitel.

Bestimmung der halben Summen ξ_{mp} η_{mp} etc.

(Componenten in Folge der Beanspruchung [P].)

§. 4. Gleichungen des Gleichgewichtes.

Für das verticale Gleichgewicht jenes Theiles des Pfeilers, welcher sich über dem m^{ten} Felde befindet, hat man die Bedingung:

$$[\Omega'_m] + [\Omega''_m] + ([\omega'_m] + [\omega''_m]) \cos \gamma = 2\mathrm{P} + (2m - 1)\, p\mathrm{a}.$$

Diese Gleichung, mittelst (1) in Functionen der Verschiebungen umgewandelt, $m = 1$ bis $m = n$ gesetzt, (2) und (3) in Rechnung gezogen, und schliesslich:

$$\mathrm{P}_m = \mathrm{P} + \left(m - \frac{1}{2}\right) p\mathrm{a} \tag{4}$$

eingeführt, gibt das System:

$$\begin{array}{ll}
\eta_{0p} \quad - \eta_{1p} = \dfrac{\mathrm{P}_1 \mathrm{a}}{\mathrm{O} + \mathrm{o}} + \dfrac{\mathrm{bw}}{\mathrm{a}} \xi_p & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\eta_{m-1p} - \eta_{mp} = \dfrac{\mathrm{P}_m \mathrm{a}}{\mathrm{O} + \mathrm{o}} + \dfrac{\mathrm{bw}}{\mathrm{a}} (\xi_{m-1p} + \xi_{mp}) & (5) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\eta_{n-1p} \quad = \dfrac{\mathrm{P}_n \mathrm{a}}{\mathrm{O} + \mathrm{o}} + \dfrac{\mathrm{bw}}{\mathrm{a}} \xi_{n-1p} &
\end{array}$$

Wegen der vorausgesetzten Starrheit des Pfeilerkopfes ist $\xi_{0p} = 0$ und $\xi'_0 = - \xi''_0$.

Durch aufeinander folgende Summirung kann man aus dem Systeme (5) die η_p in Functionen von ξ_p erhalten.

Die Projection der inneren Kräfte der Stangen, welche in m' und m'' zusammenlaufen auf die Horizontale, führt zu den Bezeichnungen:

$$(6)\quad \begin{aligned} X'_m &= ([\omega'_m] + [\omega''_{m+1}]) \sin\gamma - [\varrho_m] \\ X''_m &= ([\omega''_m] + [\omega'_{m+1}]) \sin\gamma - [\varrho_m] \end{aligned}$$

Das System (6) mit Hilfe von (1) transformirt, (2) und (3) berücksichtigt, dann summirt, gibt:

$$X_{mp} = \frac{\mathrm{bo}}{\mathrm{a}} (\eta_{m-1p} - \eta_{m+1p}) - \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^3} (\mathrm{o}\xi_{m-1p} + 2(\mathrm{o} + \mathrm{r})\xi_{mp} + \mathrm{o}\xi_{m+1p})$$

eliminirt man daraus die η_p mittelst einer Gleichung, welche aus dem Systeme (5) durch Summirung der m^{ten} und $m + 1^{ten}$ erhalten wird, so folgt nach durchgeführter Reducirung:

$$(7)\quad X_{mp} = \frac{\mathrm{bw}}{\mathrm{a}} (P_m + P_{m+1}) - \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^3} (\mathrm{u}\xi_{m-1p} + 2(\mathrm{u} + \mathrm{r})\xi_{mp} + \mathrm{u}\xi_{m+1p})$$

der Fundamental-Ausdruck für die Bestimmung von ξ_p.

§. 5. Lösung der Aufgabe; der Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet.

Wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet, so sind die Bedingungen für das horizontale Gleichgewicht der Knoten m' und m'':

$$X'_m - q\mathrm{a} = 0 \qquad X''_m + q\mathrm{a} = 0$$

und summirt:

$$X_{mp} = 0;$$

daher gibt (7), wenn man m von 1 bis $n - 1$ variiren lässt, das allgemeine System für die Bestimmung der $n - 1$ unbekannten ξ_p:

$$(8)\quad \begin{aligned} 2(\mathrm{u} + \mathrm{r})\xi_{1p} + \mathrm{u}\xi_{2p} &= \frac{\mathrm{wa}^2}{\mathrm{b}} (P_1 + P_2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{u}\xi_{m-1p} + 2(\mathrm{u} + \mathrm{r})\xi_{mp} + \mathrm{u}\xi_{m+1p} &= \frac{\mathrm{wa}^2}{\mathrm{b}} (P_m + P_{m+1}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{u}\xi_{n-2p} + 2(\mathrm{u} + \mathrm{r})\xi_{n-1p} &= \frac{\mathrm{wa}^2}{\mathrm{b}} (P_{n-1} + P_n). \end{aligned}$$

§. 6. Die Continuität der Säulen und ihre Befestigung an den Enden in Rechnung gezogen.

Bei dieser Annahme befinden sich die Säulen, nach der Deformation, offenbar unter denselben Bedingungen wie ein continuirlicher, an den

Enden eingespannter Träger, welcher auf Stützen in verschiedenen Höhen ruht, und wir können das Gleichgewicht untersuchen, indem wir auf jede der Säulen das System der Gleichungen (o) (Einleitung IV) anwenden. Dieses System muss zu diesem Zwecke transformirt werden, indem man setzt:

$$l = \mathrm{a} \quad \mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \quad \mathrm{I} = \Omega \mathrm{i}^2 \quad x_n = t_n = 0$$

und ferner[1]) für die Säule Ω':

$$\mathrm{X}_m = \mathrm{X}'_m \quad x_m = -\xi'_m \quad q = q \quad t_0 = \frac{\eta''_0 - \eta'_0}{\mathrm{b}} = \frac{2\eta_{0q}}{\mathrm{b}}$$

dagegen für die Säule Ω'':

$$\mathrm{X}_m = \mathrm{X}''_m \quad x_m = -\xi''_m \quad q = -q \quad t_0 = -\frac{2\eta_{0q}}{\mathrm{b}}.$$

Summirt man die correspondirenden Gleichungen der beiden Systeme und schreibt das resultirende System mit den Bezeichnungen (2), mit Berücksichtigung von $\xi_{op} = 0$, so erhält man:

$$7\mathrm{X}_{1p} + 2\mathrm{X}_{2p} = \frac{6\mathrm{O}\mathrm{i}^2}{\mathrm{a}^3}(18\xi_{1p} - 9\xi_{2p} + 2\xi_{3p})$$

. . . .

$$\mathrm{X}_{m-1p} + 4\mathrm{X}_{mp} + \mathrm{X}_{m+1p} = \frac{6\mathrm{O}\mathrm{i}^2}{\mathrm{a}^3}(\xi_{m-2p} - 4\xi_{m-1p} + 6\xi_{mp} - 4\xi_{m+1p} + \xi_{m+2p}) \tag{9}$$

. . . .

$$2\mathrm{X}_{n-2p} + 7\mathrm{X}_{n-1p} = \frac{6\mathrm{O}\mathrm{i}^2}{\mathrm{a}^3}(2\xi_{n-3p} - 9\xi_{n-2p} + 18\xi_{n-1p})$$

Substituiren wir jetzt in (9) X_{mp} durch den Ausdruck (7), so erhält man das allgemeine System für die Bestimmung von ξ_p, welches wir in folgender Form schreiben:

$$(2a_1 - a_2 + 2a_3)\xi_{1p} + (2a_2 - a_1)\xi_{2p} + 2a_1\xi_{3p} = 2\mathrm{wa}^2\mathrm{b}(9\mathrm{P} + 11p\mathrm{a})$$

. . . .

$$a_1\xi_{m-2p} + a_2\xi_{m-1p} + a_3\xi_{mp} + a_2\xi_{m+1p} + a_1\xi_{m+2p} = 12\mathrm{wa}^2\mathrm{b}(\mathrm{P} + mp\mathrm{a}) \tag{10}$$

. . . .

$$2a_1\xi_{n-3p} + (2a_2 - a_1)\xi_{n-2p} + (2a_1 - a_2 + 2a_3)\xi_{n-1p} = 2\mathrm{wa}^2\mathrm{b}(9\mathrm{P} + [9n - 11]p\mathrm{a})$$

---

[1]) Hiebei erinnern wir uns an die gemachten Annahmen bezüglich der Zeichen der Verschiebungen und der Anwendung der Gleichungen des continuirlichen Trägers auf die Säulen.

wobei die Coëfficienten a_1, a_2, a_3 folgende Werthe haben:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \qquad\qquad \mathrm{u b^2} + 6 \mathrm{O i^2} \\
a_2 &= (\ 6\mathrm{u} + 2\mathrm{r})\, \mathrm{b^2} - 24 \mathrm{O i^2} \\
a_3 &= (10\mathrm{u} + 8\mathrm{r})\, \mathrm{b^2} + 36 \mathrm{O i^2}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Bestimmt man die ξ_p aus dem Systeme (10) (oder unter der Voraussetzung der Gelenkigkeit des Systemes aus [8]), so erhält man aus (5) die η_p.

Halbe Summen μ_{mp}.

Die μ_p kann man mittelst der Formeln (N) (Einleitung III) in Functionen von ξ_p erhalten; dieselben sind für die n—1 Zwischen-Knotenpunkte der beiden Säulen anwendbar, wenn man die oben erwähnte Transformation durchführt und noch hinzufügt:

$$
\begin{aligned}
M_m &= \mu'_m \text{ für die Säule } \Omega' \\
M_m &= \mu''_m \quad „ \quad „ \quad „ \quad \Omega''
\end{aligned}
$$

Summirt man sodann die beiden erhaltenen Gleichungen:

$$
\mu_{mp} = \frac{\mathrm{a}}{6} \mathrm{X}_{mp} - \mathrm{O} \frac{\mathrm{i^2}}{\mathrm{a^2}} (\xi_{m-1p} - 2\xi_{mp} + \xi_{m+1p}) \tag{12}
$$

hier muss man für X_{mp} den Ausdruck (7) substituiren.

Für die äussersten, befestigten Querschnitte hat man:

$$
\begin{aligned}
\mu_{op} &= -\frac{1}{2}\mu_{1p} \quad -3\mathrm{O}\frac{\mathrm{i^2}}{\mathrm{a^2}}\xi_{1p} \quad = -\frac{\mathrm{a}}{12}\mathrm{X}_{1p} \quad -\mathrm{O}\frac{\mathrm{i^2}}{\mathrm{a^2}}(5\xi_{1p} \quad - \xi_{2p}) \\
\mu_{np} &= -\frac{1}{2}\mu_{m-1p} - 3\mathrm{O}\frac{\mathrm{i^2}}{\mathrm{a^2}}\xi_{n-1p} = -\frac{\mathrm{a}}{12}\mathrm{X}_{n-1p} - \mathrm{O}\frac{\mathrm{i^2}}{\mathrm{a^2}}(5\xi_{n-1p} - \xi_{n-2p})
\end{aligned} \tag{12'}
$$

Aus der vorhergehenden Abhandlung geht in strenger Weise die Richtigkeit des 1. Theiles des Fundamental-Lehrsatzes hervor, nachdem die Beanspruchung [Q] in den Schlussformeln nicht erscheint, welche die halben Summen der homologen Elemente geben.

Wir werden daher die Buchstaben ohne Unterschied mit den Zeigern p oder q versehen, entweder als halbe Summen oder halbe Differenzen der homologen Verschiebungen, Kräfte und Momente, oder als Componenten derselben, welche aus den Beanspruchungen [P] und [Q] folgen (wobei wir das doppelte Vorzeichen den Buchstaben mit dem Zeiger q geben).

§. 7. Angenäherte, explicite Lösung.

Die oben durchgeführte strenge Abhandlung erfordert zur Bestimmung der ξ_p die Lösung eines Systemes von Gleichungen; eine Lösung, welche für einen Pfeiler mit vielen Feldern einige Schwierigkeiten bieten kann. Die Aufgabe kann aber auch angenähert in expliciter Form durch einen Ausdruck von ξ_{mp} gelöst werden, welcher in strenger Weise den allgemeinen Gleichungen (8) und (10) genügt, und dessen Annäherung wir in Bezug auf jede derselben erörtern werden. Es sei:

$$\text{(13)} \qquad \psi = \frac{\mathrm{w}}{2\mathrm{u} + \mathrm{r}} = \frac{\mathrm{o}}{\mathrm{Or} + 2\mathrm{Oo} + \mathrm{or}}$$

dann ist:

$$\text{(14)} \qquad \xi_{mp} = \psi \, \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} \cdot \frac{\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m+1}}{2} = \psi \, \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} \, (\mathrm{P} + mp\mathrm{a})$$

Die Gleichung (14) genügt für die n—3 Zwischengleichungen des Systemes, aber nicht für die beiden äussersten, welchen in Folge der den äussersten Knotenpunkten zukommenden Bedingungen ein Glied fehlt.

Würde man voraussetzen, dass diese Knotenpunkte in Folge der Einwirkung von [P] horizontalen Verschiebungen unterliegen, und zwar unter denselben Bedingungen wie die Zwischen-Knotenpunkte [1]), so wäre der Ausdruck (14) vollkommen richtig. Die deformirten Achsen der Säulen würden sich geradlinig und nach oben convergirend darstellen; sieht man dagegen vom Eigengewichte ab, so würde (14) für ξ_p einen constanten Werth geben, d. h. die Säulen würden sich parallel zu sich selbst verschieben.

Mit dieser Annahme hätte auch die Continuität oder Discontinuität der Säulen keinen Einfluss auf die äussersten Knotenpunkte, was auch noch dadurch bewiesen wird, dass (14) der allgemeinen Gleichung (10) genügt und in (12) substituirt $\mu_{mp} = 0$ gibt.

Unter der Annahme der Gelenkigkeit der Knotenpunkte kann man aus dem Systeme (8) ableiten, dass in der Reihe der Werthe ξ_p, welche demselben genügen, die ξ_{1p} und ξ_{n-1p} etwas grössere Werthe erhalten

---

[1]) Es ist leicht einzusehen, dass man bei diesen Annahmen sich die äussersten Knotenpunkte durch horizontale Stangen verbunden denken muss, deren Querschnitt gleich $\frac{1}{2}\varrho$ ist.

als die aus (14) bestimmten, während die aufeinander folgenden ξ_p sich mehr nähern; d. h. die Achse der Säulen wird durch die Wirkung von [P] nach einer gebrochenen Linie deformirt und wird an den Knoten 1 und $n-1$ nach Aussen [1]) zwei hervorragende Punkte bilden.

Wenn man nun berücksichtigt, dass die Continuität der Säulen einer ähnlichen Deformirung entgegenstrebt, so kann man beweisen, dass der Ausdruck (14) unter gewissen Bedingungen auch den äusseren Gleichungen des Systemes (10) genügen kann. Die angedeuteten Bedingungen beziehen sich auf den Werth des Trägheitsmomentes der Säule.

Sieht man von dem Eigengewichte ab und substituirt für ξ_p den Ausdruck (14) in der ersten (oder letzten) Gleichung des Systemes (10), so erhält man:

$$66\,i^2 - 7\,w\,b^2 = 0 \tag{15}$$

oder

$$\frac{i}{b} = 0{,}316\,\sqrt{w}, \tag{15'}$$

welche Bedingung von den gewöhnlichen Angaben [2]) nicht viel abweicht.

Gleichwohl kann (14) weder mit dieser noch mit irgend einer anderen Bedingung, der zweiten oder vorletzten Gleichung (10) vollkommen genügen, welche wohl von der allgemeinen Form sind, denen aber die Glieder von ξ_{op} und ξ_n fehlen.

Substituiren wir (14) in das erste Glied einer dieser beiden Gleichungen, so erhält man die Bedingung:

$$6\,i^2 + w\,b^2 = 0,$$

welche keine reellen Werthe für i ergibt.

Der Fehler von (14) ist aber in Bezug auf diese Gleichungen nicht sehr bedeutend, denn mit Anwendung von (14) und dem Werthe i^2,

---

[1]) Siehe das folgende Zahlenbeispiel.

[2]) Nach den Angaben:

$$E = F_1 \quad \gamma = 45^\circ \quad \frac{\Omega}{\omega} = 10$$

würde (15') geben:

$$\frac{i}{b} = 0{\cdot}0583.$$

aus (15) erhalten, werden die ersten Glieder der zweiten und vorletzten Gleichung (10) von den zweiten Gliedern nur um den Bruchtheil

$$\frac{3}{44} \cdot \frac{u}{u + \frac{1}{2} r}$$

des Werthes der zweiten Glieder verschieden sein.

Diese Auseinandersetzung zeigt den bedeutenden Grad der Annäherung, welchen man mit Anwendung von (14) erreicht; und diese Art der expliciten Lösung ist um so wichtiger, weil selbe eine rasche Bestimmung der inneren Beanspruchungen, welche durch die äussere Beanspruchung auf Zerknicken hervorgerufen werden, ableiten lässt, eine Bestimmung, für welche jede andere Methode absolut unzulänglich ist.

Mit Anwendung von (14) erhält man nach Reducirung aus der allgemeinen Gleichung (5):

$$(16) \qquad \eta_{m-1p} - \eta_{mp} = (1 - \psi r) \frac{P_m a}{O},$$

woraus man den Widerstands-Querschnitt des Pfeilers bezüglich der Beanspruchung auf Zerknicken in folgender Form erhält:

$$\frac{2\Omega}{1 - \psi r},$$

womit auch der Einfluss des Gitterwerkes definirt ist.

Wenn man die Ausdrücke für die homologen Spannungen (1) summirt, (2) in Rechnung zieht und dann ξ_p und η_p mittelst (14) und (16) eliminirt, so erhält man nach durchgeführter Reduction:

$$(17) \qquad \begin{aligned} [\Omega_m]_p &= (1 - \psi r) P_m \\ [\omega_m]_p &= \psi r \frac{P_m}{\cos \gamma} \\ [\varrho_m]_p &= \psi r \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot \gamma}. \end{aligned}$$

Fügen wir noch einige Bemerkungen zu diesen merkwürdigen Ausdrücken.

Es ist leicht zu erkennen, dass (17) in strenger Weise den Gleichgewichtsbedingungen der Knotenpunkte entspricht.

Das Verhältniss zwischen der Beanspruchung des m^{ten} Säulentheiles und jener der m^{ten} Diagonalstange ist:

$$\frac{[\Omega_m]_p}{[\omega_m]_p} = \left(\frac{2\,O}{r} + \frac{O}{o}\right) \cos\gamma.$$

Dieses nimmt einen kleineren Werth an, bei der Zunahme von O oder r, d. h. bei der Vergrösserung der Querschnitte ω oder ϱ der Stangen des Gitterwerkes.

Wenn bei den Säulen jede horizontale Verschiebung aufgehoben ist, eine Bedingung, welche man in die Formel einführen kann, indem man $r = \infty$ setzt, so erhält das obige Verhältniss den Grenzwerth:

$$\frac{O}{o} \cdot \cos\gamma.$$

Ferner hat man mit dieser Annahme:

$$\lim \psi r = w$$

und (17) nimmt die einfache Form an:

$$(17') \qquad \begin{aligned} [\Omega_m]_p &= (1 - w)\, P_m \\ [\omega_m]_p &= \quad w\, \frac{P_m}{\cos\gamma} \\ [\varrho_m]_p &= \quad w\, \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot\gamma}. \end{aligned}$$

Schliesslich wollen wir noch hervorheben, dass mit Hilfe der Formel (17) alle Aufgaben gelöst werden können, welche man bei der Construction in Bezug auf das Gleichgewicht eines auf Zerknicken beanspruchten Pfeilers stellen kann, darunter auch die Hauptaufgabe: Bestimmung der Querschnitte aller Theile eines Pfeilers, derart, dass die specifischen Beanspruchungen in jedem einen gegebenen Werth haben.

Nimmt man, wie es gewöhnlich der Fall ist, die Querschnitte ω, ϱ, Ω als Unbekannte an, so kann man mit Hilfe von (17) dieses und analoge Probleme lösen.

§. 8. Zahlenbeispiel.

Aus der folgenden Tabelle, in welcher nach den drei Methoden für einen Pfeiler mit sieben Feldern (Fig. 9) die Werthe der Verschiebungen und Beanspruchungen zusammengestellt sind, kann man ersehen, welche Resultate die verschiedenen Arten der Lösung ergeben und welcher Grad der Annäherung mit der expliciten Lösung erreicht wird.

Nehmen wir als gegeben an:

$$\begin{cases} a = 4{\cdot}50\,m \\ b = 2{\cdot}70\ \text{„} \\ \gamma = 31^0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega = 0{\cdot}0450\,m^2 \\ \omega = \varrho = 0{\cdot}0035\ \text{„} \\ i = 0{\cdot}087\,m \end{cases} \quad \begin{cases} P = 100.000\,kg \\ p = 1.750\ \text{„} \\ E = 2E_1 = 2 \times 10^{10} \end{cases}$$

Dieses sind, von einer leichten Schrägheit der Säulen abgesehen, die mittleren Daten für einen der vier einfachen Pfeiler, welche zusammen den grossen Pfeiler des Viaductes von Busseau bilden (Nordling).

Mit vorstehenden Daten erhält man:

$$\begin{cases} O = 450{,}000.000 \\ r = 314{,}000.000 \\ o = 42{,}870.000 \end{cases} \quad \begin{cases} w = 0{\cdot}08698 \\ u = 39{,}141.000 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{10^{10}}\, 2{\cdot}1625 \\ \psi r = 0{\cdot}0697. \end{cases}$$

Die nach den drei Methoden berechneten Werthe der horizontalen Verschiebungen und der Beanspruchungen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

		I. Der Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet (Gleichungen [8])	II. Die Continuität der Säulen etc. in Rechnung gezogen (Gleichungen [10])	III. Explicite, angenäherte Lösung (Formeln [14] [17])
Horizontale Verschiebungen ξ_{mp} in *mm*	$m = 1$	0·178	0·174	0·165
	2	0·164	0·180	0·168
	3	0·157	0·199	0·171
	4	0·163	0·201	0·173
	5	0·172	0·190	0·176
	6	0·194	0·189	0·179
Beanspruchungen $[\Omega_m]_p$ in *kg* (Drücke)	$m = 1$	93030	93000	93840
	2	95470	95530	95470
	3	96940	97250	97100
	4	98530	98950	98730
	5	100190	100500	100360
	6	101950	102020	101980
	7	102640	102610	103600
Beanspruchungen $[\omega_m]_p$ in *kg* (Drücke)	$m = 1$	9150	9180	8200
	2	8310	8250	8340
	3	8640	8260	8480
	4	8820	8320	8620
	5	8900	8550	8760
	6	8890	8810	8900
	7	10110	10140	9040
Beanspruchungen $[\varrho_m]_p$ in *kg* (Züge)	$m = 1$	9230	9020	8500
	2	8500	9330	8650
	3	8140	10320	8800
	4	8450	10420	8950
	5	8920	9850	9100
	6	10060	9800	9250

Diese Resultate sind einer näheren Betrachtung werth.

Verschiebungen ξ_{mp} (Fig. 9).

I. (Gelenkiges System.) Diese Serie ergibt zwei Maximalwerthe für $m = 1$, $m = 6$ und eine Verminderung gegen die Mitte des Pfeilers, d. h. die Säule biegt sich nach einer krummen Linie, concav nach Aussen zwischen den Knotenpunkten 1 und 6, welche in Folge der Befestigung der äussersten Knotenpunkte 0 und 7 stark hervorragen. (Siehe vorhergehenden Paragraph.)

II. (Continuität etc. in Rechnung gezogen.) Die Werthe dieser Serie wachsen gegen die Mitte, aber nicht so ihre Differenzen. Die Abweichung der Säulen ist grösser, aber die Befestigung der Endquerschnitte stört die Deformation durch Ausbauchungen bei den vorletzten Knotenpunkten.

III. (Angenäherte, explicite Lösung.) Die Werthe dieser Serie wachsen im linearen Masse nach unten in Folge der Wirkung des Eigengewichtes und halten die Mitte zwischen den zwei vorhergehenden Reihen; nähern sich in den centralen Knotenpunkten eher der Serie I.

Innere Beanspruchungen.

$[\varrho_m]_p$. Dieselben folgen in den drei Fällen demselben Gesetze wie die horizontalen Verschiebungen. Bemerkenswerth ist, dass diese Beanspruchungen unter der Annahme der Continuität der Säulen einen Maximalwerth erreichen, wenigstens für die mittleren Stangen.

$[\omega_m]_p$. Die Werthe der Serien I und II, welche beinahe zusammenfallen, geben beide zwei Maximalwerthe für die Beanspruchung der Diagonalstangen der äussersten Felder. Die Werthe der Serie III halten die Mitte zwischen jenen der beiden früheren für die drei mittleren Felder, übersteigen sie etwas für die vorletzten und differiren nur bei den letzten Feldern fühlbar.

$[\Omega_m]_p$. Diese folgen in allen drei Fällen einem umgekehrten Gesetze, als jenes für die correspondirenden Werthe der Beanspruchungen der Diagonalstangen ist.

Diese Zahlenergebnisse zeigen, dass die mit der expliciten Lösung (14) erhaltenen Werthe für die Verschiebungen und Beanspruchungen eine für die Zwecke der Praxis mehr als genügende Annäherung haben.

Schliesslich beachten wir noch, dass sich das Kennzeichen für die Annäherung der expliciten Lösung, mit Anwendung von (15') mit den Angaben des Beispieles nicht günstig gestaltet, nämlich:

$$\frac{i}{b} = 0{\cdot}032$$

$$0{\cdot}316\sqrt{w} = 0{\cdot}093.$$

III. Capitel.

Bestimmung der halben Differenzen ξ_{mq} η_{mq} etc.

(Componenten in Folge der Inanspruchnahme [Q].)

§. 9. **Allgemeine Gesetze für die Deformirung und für das System der inneren Beanspruchungen, welche durch [Q] hervorgebracht werden.**

Nach dem Fundamental-Lehrsatze und Folgesatze, welche im §. 2 vorgebracht und im vorhergehenden Capitel bewiesen wurden, sind, wenn man die Beanspruchungen [P] eliminirt, die Summen der homologen Verschiebungen und Beanspruchungen gleich Null, d. h.:

Die Beanspruchung [Q] (Fig. 8) bringt folgende Wirkung hervor:

1. Die beiden Säulen biegen sich seitlich in gleicher Weise, sie deformiren sich nämlich nach zwei congruenten Curven [1]).

2. Die Beanspruchungen der horizontalen Stangen sind gleich Null.

3. Die Beanspruchungen der Säulentheile eines Feldes sind gleich und von entgegengesetztem Zeichen, ebenso wie die Beanspruchungen der Diagonalstangen, und es ist leicht zu erkennen, dass (als positiv derselbe Sinn wie bei Q, q, M angenommen) die Glieder:

[Ω'], [ω'] auf Zug, und die Glieder

[Ω''], [ω''] auf Druck beansprucht sind.

---

[1]) Die beiden deformirten Achsen der Säulen können nur dann als congruent betrachtet werden, wenn man von ihrer Längenänderung absieht. Mit anderen Worten, während die Verschiebungen ξ_q von zwei Punkten der Säulen, die ursprünglich in derselben Höhe liegen, gleich sind, ist dies dagegen in strenger Weise nicht der Fall für zwei Punkte, welche nach der Deformation dieselbe Höhenlage haben. Aber in den Grenzen der Annäherung dieser Methode kann man eine solche Differenz als Grösse höherer Ordnung bezüglich derselben Verschiebungen vernachlässigen und die beiden deformirten Achsen als vollkommen congruent annehmen.

Diese Eigenschaft berechtigt zur Anwendung der statischen Methoden für die Aufsuchung der inneren Beanspruchungen, welche durch [Q] hervorgebracht werden, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet. Die Methode der Verschiebungen hat aber auch in einem solchen Falle gegenüber statischen Methoden den Vortheil, dass man mit Leichtigkeit die umgekehrte Aufgabe lösen kann: Wenn irgend ein Element der Deformation gegeben ist (z. B. die horizontalen Verschiebungen oder die Neigung des Pfeilerkopfes) die äusseren unbekannten Kräfte und das correspondirende System der inneren Beanspruchungen zu bestimmen.

Wir werden daher die Aufgabe nach zwei Methoden lösen, indem wir sowohl die Beanspruchungen wie die Verschiebungen, welche von [q] hervorgebracht werden, bestimmen; wir werden die Beanspruchungen und Verschiebungen auf Grund des Fundamental-Lehrsatzes und der Bedingungen (2) in Form von halben Differenzen der homologen Beanspruchungen und Verschiebungen in die Rechnung einführen.

§. 10. Gleichgewichts-Gleichungen.

Wir werden die Gleichgewichts-Gleichungen in ihrer grössten Allgemeinheit aufschreiben, d. h. die Säulen als elastische, continuirliche Körper und an beiden Enden eingespannt annehmen.

Betrachten wir den Querschnitt $\overline{zz}$ über den m^{ten} Knotenpunkten (Fig. 6), so resultirt als Bedingung für das Gleichgewicht jenes Theiles des Pfeilers, welcher über $\overline{zz}$ liegt, in Bezug auf Drehung um den Kreuzungspunkt B der m^{ten} Diagonalstangen:

$$([\Omega''_m] - [\Omega'_m]) \frac{b}{2} = M + 2Q\left(m - \frac{1}{2}\right) a + \\ + qm(m-1)a^2 - \mu'_m + \mu''_m + (\tau'_m - \tau''_m)\frac{a}{2}$$

und als Bedingung für das horizontale Gleichgewicht:

$$([\omega''_m] - [\omega'_m]) \sin \gamma = 2(Q + qm a) - \tau'_m + \tau''_m.$$

Eliminirt man die abscheerenden Kräfte τ'_m und τ''_m mittelst:

$$\tau'_m = \frac{-\mu'_{m-1} + \mu'_m}{a} + \frac{1}{2} q a \qquad \tau''_m = \frac{-\mu''_{m-1} + \mu''_m}{a} - \frac{1}{2} q a$$

so werden die vorhergehenden Gleichungen mit Berücksichtigung von (2) auf die Form reducirt:

$$(18) \qquad [\Omega_m]_q = \frac{\mathfrak{M}_m}{b}$$

$$(19) \qquad [\omega_m]_q \cos\gamma = \frac{\mathfrak{N}_m}{b},$$

wobei die folgenden Positionen gelten:

$$\mathfrak{M}_m = M_m - \mu_{m-1q} - \mu_{mq}$$
$$\mathfrak{N}_m = Q_m a + \mu_{m-1q} - \mu_{mq}$$

$$(20) \qquad M_m = M + 2Q\left(m - \frac{1}{2}\right) a + q\left(m(m-1) + \frac{1}{2}\right) a^2$$
$$Q_m = Q + q\left(m - \frac{1}{2}\right) a.$$

Verwandelt man (18) und (19) mit Zuhilfenahme von (1) in Functionen der Verschiebungen um, berücksichtigt (2) und (3) und lässt den Index m von 1 bis n variiren, so erhält man die beiden Systeme:

$$\eta_{0q} - \eta_{1q} = \frac{a}{O} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{b}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(21) \qquad \eta_{m-1q} - \eta_{mq} = \frac{a}{O} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{b}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{n-1q} = \frac{a}{O} \cdot \frac{\mathfrak{M}_n}{b}$$

$$\xi_{0q} - \xi_{1q} = \left(\frac{a}{o} \cdot \frac{\mathfrak{N}_1}{b} + \eta_{0q} + \eta_{1q}\right) \cot\gamma$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(22) \qquad \xi_{m-1q} - \xi_{mq} = \left(\frac{a}{o} \cdot \frac{\mathfrak{N}_m}{b} + \eta_{m-1q} + \eta_{mq}\right) \cot\gamma$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_{n-1q} = \left(\frac{a}{o} \cdot \frac{\mathfrak{N}_n}{b} + \eta_{n-1q}\right) \cot\gamma.$$

(18) (19) (21) (22) bilden die Fundamental-Formeln für die Lösung der Aufgabe.

§. 11. Lösung der Aufgabe, indem man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet.

Mit dieser Annahme ist:

$$\mathfrak{M}_m = M_m \quad \mathfrak{N}_m = Q_m \, a$$

und die Gleichungen (21) von der letzten bis zur $m+1$. summirt geben:

$$\eta_{mq} = \frac{(n-m)}{O} \left(M + (n+m) Q a + \frac{1}{3} \left(n^2 + nm + m^2 + \frac{1}{2} \right) q a^2 \right) \cot \gamma.$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck für die η_q, welcher unabhängig vom Querschnitte der Stangen des Gitterwerkes resultirt.

Summirt man die Gleichungen (22) von der letzten bis zur $m+1$., so ergibt sich:

$$\xi_{mq} = \left(\frac{(n-m)}{O} \left(Q a + \frac{n+m}{2} q a^2 \right) \cot \gamma + \eta_{mq} + \right.$$
$$\left. + 2 \left(\eta_{m+1q} + \ldots + \eta_{n-1q} \right) \right) \cot \gamma.$$

Mit diesen Ausdrücken kann man die umgekehrte Aufgabe, wie im §. 9 angegeben wurde, lösen.

Aus (18) und (19) erhält man unmittelbar die expliciten Ausdrücke für die Beanspruchungen:

$$(23) \qquad [\Omega_m]_q = \frac{M_m}{b}, \qquad [\omega_m]_q = \frac{Q_m}{\sin \gamma}.$$

Wenn wir die zweite Formel in (23) betrachten, so sehen wir, dass die Beanspruchung der geneigten Stangen von dem Momente M unabhängig ist, und daraus folgt, mit Berücksichtigung der schon bewiesenen Eigenschaft: Das Moment M bringt weder in den horizontalen noch in den geneigten Stangen des Gitterwerkes eine Inanspruchnahme hervor.

Die mit Bezug auf die Annäherung der Methode der Verschiebungen (Einleitung II) gemachten Bemerkungen erklären die Anfangs paradoxe

Bedeutung der Lösungsformeln für den Fall, dass sich die Beanspruchung auf das Moment M reducirt. Diese Formeln zeigen, dass sich der Pfeiler in Folge der Einwirkung von M seitlich biegt (denn die ξ_q, aus [22] erhalten, werden nicht Null für $Q = q = 0$), was offenbar nicht stattfinden könnte, wenn man alle Stangen des Gitterwerkes eliminiren (deren Beanspruchung andererseits Null ist) und den Pfeiler auf zwei Säulen reduciren würde, welche von gleichen Kräften beansprucht werden, eine auf Zug, die andere auf Druck.

Man hat die Lösung des Widerspruches, wenn man beachtet, dass die Beanspruchung der geneigten Stangen strenge genommen nicht Null ist, sondern von einer solchen Grösse, dass das Gleichgewicht unter den Bedingungen hergestellt wird, die man durch Einführung der Winkeländerungen der Glieder des Pfeilers erhalten würde.

§. 12. Die Continuität der Säulen und ihre Befestigung an den Enden in Rechnung gezogen.

Die Lösung der Systeme (21) und (22) oder die Anwendung von (18) und (19) erfordert früher die Bestimmung von μ_q, welche mittelst einer Combination durchgeführt werden kann, und zwar von (21) und (22) mit den allgemeinen Gleichungen (M) (Einleitung IV) des continuirlichen Trägers auf verschieden hochgelegenen Stützpunkten und an den Enden eingespannt, angewendet auf das Studium der Deformation der Säulen.

Wenn man (M) für die beiden Säulen mit den im §. 5 bestimmten Umänderungen der Zeichen schreibt und die correspondirenden Gleichungen der beiden Systeme subtrahirt, ferner (2) und (3) in Rechnung zieht, so erhält man ein System von $n + 1$ Gleichungen, welche, mit $\frac{a}{2}$ multiplicirt, sich folgend ergeben:

$$\frac{2a}{b}\eta_{0q} - \xi_{0q} + \xi_{1q} = \frac{a^2}{60\,i^2}\left(+ 2\mu_{0q} + \mu_{1q} - \frac{1}{4} q a^2\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(24)\quad \xi_{m-1q} - 2\xi_{mq} + \xi_{m+1q} = \frac{a^2}{60\,i^2}\left(\mu_{m-1q} + 4\mu_{mq} + \mu_{m+1q} - \frac{1}{2} q a^2\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{n-1q} = \frac{a^2}{60\,i^2}\left(\mu_{n-1q} + 2\mu_{nq} - \frac{1}{4} q a^2\right)$$



Aus den Systemen (21) (22) (24) kann man die Verschiebungen eliminiren und erhält so ein System zur Bestimmung von μ_q in folgender Weise.

Transformiren wir das System (22), indem wir jede Gleichung von der vorangehenden abziehen, und behalten wir die erste und letzte in ihrer Form bei, indem wir bei den beiden Gliedern der ersten Gleichung die Zeichen wechseln und den Ausdruck $\frac{2a}{b}\eta_{0q}$ hinzufügen, so erhält man folgendes System von $n+1$ Gleichungen:

$$\frac{2a}{b}\eta_{0q} - \xi_{0q} + \xi_{1q} =$$

$$= \frac{a}{b}\left[\frac{a}{ob}\left(\quad - \mu_{0q} + \mu_{1q} - Q_1 a\right) + \eta_{0q} - \eta_{1q}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(22') \quad \xi_{m-1q} - 2\xi_{mq} + \xi_{m+1q} =$$

$$= \frac{a}{b}\left[\frac{a}{ob}\left(\mu_{m-1q} - 2\mu_{mq} + \mu_{m+1q} - q a\right) + \eta_{m-1q} - \eta_{m+1q}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{n-1q} = \frac{a}{b}\left[\frac{a}{ob}\left(\mu_{n-1q} - \mu_{nq} \quad + Q_n a\right) + \eta_{n-1q}\right]$$

Jetzt können die Ausdrücke, welche die ersten Glieder von (22′) bilden, mittelst (24) eliminirt werden, und die Ausdrücke mit η_q, welche in den zweiten Gliedern enthalten sind, mittelst (21). Diese zweite Eliminirung wird ausgeführt:

a) Für die erste und letzte Gleichung von (22′) mittelst der ersten und letzten des Systemes (21);

b) für die $n-1$ Zwischengleichungen mittelst des Systemes der $n-1$ Gleichungen, welche man durch successive Summirung der (21) erhält.

Es ergibt sich auf solche Weise ein System, welches als einzige Unbekannte μ_q enthält; multiplicirt man mit $O\frac{b^2}{a^2}$ und setzt:

$$(25) \qquad f_1 = \frac{b^2}{6i^2} - \frac{O}{o} + 1$$

$$f_2 = \frac{b^2}{3i^2} + \frac{O}{o} + 1,$$

so ergibt sich folgende Form:

$$
\begin{array}{ll}
f_2\mu_{0q} + f_1\mu_{1q} & = \mathrm{M}_1 - \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}}\mathrm{Q}_1\mathrm{a} + q\mathrm{a}^2\frac{\mathrm{b}^2}{24\mathrm{i}^2} \\
\ldots\ldots\ldots & \\
f_1\mu_{m-1q} + 2f_2\mu_{mq} + f_1\mu_{m+1q} & = \mathrm{M}_m + \mathrm{M}_{m+1} + q\mathrm{a}^2\left(\frac{\mathrm{b}^2}{12\mathrm{i}^2} - \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}}\right) \\
\ldots\ldots\ldots & \\
f_1\mu_{n-1q} + f_2\mu_{nq} & = \mathrm{M}_n + \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}}\mathrm{Q}_n\mathrm{a} + q\mathrm{a}^2\frac{\mathrm{b}^2}{24\mathrm{i}^2}.
\end{array}
\tag{26}
$$

Bestimmt man μ_q aus diesem Systeme, so gibt (20) die $\mathfrak{M}_m$ und $\mathfrak{N}_m$; ferner dienen (18) (19) (21) (22) zur Bestimmung der Verschiebungen und Beanspruchungen, wobei man denselben Vorgang einhält, wie selber im §. 11 auseinander gesetzt wurde.

§. 13. Explicite, angenäherte Lösung.

Diese Lösung ist nur durch einen Ausdruck für μ_{mq} gegeben, welcher annäherungsweise dem Systeme (26) genügt; zu diesem Ausdrucke kann man durch Schlussfolgerungen gelangen, welche der analytischen Behandlung vorausgeschickt werden, nachdem sie zur Beleuchtung der Natur der angenäherten Lösung dienen.

Erinnern wir uns vor Allem, dass $\pm\,\mu_{mq}$ nichts Anderes ist, als die Componente des Biegungsmomentes, in Folge der Beanspruchung [Q], an den m^{ten} Knotenpunkten der Säulen, und dass ferner die Achsen der durch [Q] deformirten Säulen annäherungsweise congruent sind mit der deformirten Achse des Pfeilers, wenn man denselben als einen homogenen Körper betrachtet.

Wir sagen annäherungsweise, weil die deformirte Achse des in obiger Weise betrachteten Pfeilers als eine Curve ohne Flexionspunkte betrachtet werden muss, während die Relation:

$$\xi''_m = -\,\xi'_m = \xi_{mq}$$

nur ersehen lässt, dass alle Knotenpunkte jeder Säule auf einer zur deformirten Achse des Pfeilers äquidistanten Curve liegen; aber zwischen zwei Knotenpunkten kann sich die Achse der Säule in anderer Weise biegen, einestheils durch die Wirkung der gleichförmig vertheilten Last q, andererseits in Folge der Befestigung an den Enden, ein

Umstand, welcher in den oberen und unteren Feldern die Biegung der Säulen stark beeinflusst. Diese zwei Ursachen trachten die deformirten Achsen krummlinig zu gestalten.

Wenn man den Winddruck auf die Knotenpunkte concentrirt vorausgesetzt, so erhält man eine bessere Uebereinstimmung der deformirten Achsen der Säulen mit der deformirten Achse des Pfeilers in den Zwischenfeldern, was auch aus der analytischen Methode resultiren wird.

Diese annähernde Uebereinstimmmung vorausgesetzt, erinnern wir uns, dass sich ein Körper mit dem Trägheitsmomente J, unter den Bedingungen des vorliegenden Falles, in Folge einer Inanspruchnahme [Q] sich ebenso deformirt, wie ein Körper mit dem Trägheitsmomente I in Folge einer Inanspruchnahme von:

$$\frac{I}{J}[Q].$$

Wenden wir dieses Princip auf den Pfeiler und eine der Säulen an, so erhält man als Biegungsmoment der Säule beim m^{ten} Knotenpunkte folgenden Ausdruck:

$$(27) \qquad \mu_{mq} = \frac{I}{J}(M + 2Qma + qm^2a^2).$$

Für die erste Annäherung angenommen:

$$J = \Omega\frac{b^2}{2}$$

und ferner gesetzt:

$$I = \Omega i^2,$$

kann man beweisen, dass (27) mit einer gewissen Näherung der allgemeinen Gleichung (26) genügt. In der That erhält man durch Einsetzen von (27) in das erste Glied von (26):

$$\left(1 + \frac{4i^2}{b^2}\right)(M_m + M_{m+1}) - qa^2\left(\frac{4i^2}{b^2}\cdot\frac{0}{0} + \frac{1}{3}\right)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem zweiten Gliede von (26) und bemerkt, dass $\frac{i^2}{b^2}$ ein sehr kleiner Werth ist, so ersieht man, dass die Ausdrücke mit M_i nahezu gleich sind, was für die expliciten Ausdrücke mit q nicht zutrifft; q hat im zweiten Gliede von (26) einen

Ausdruck mit $\frac{b^2}{i^2}$ als Coëfficienten (gewöhnlich von ziemlich bedeutender Grösse), ein Ausdruck, welchen wir unter der Voraussetzung eingeführt haben, dass q gleichförmig vertheilt, anstatt in den Knotenpunkten concentrirt ist.

Einen besseren Näherungswerth für μ_{mq} kann man erhalten, wenn man den Ausdruck für das Trägheitsmoment J des Pfeilers mittelst (26) umgestaltet. Substituirt man in (26) die μ_q aus (27) und vernachlässigt einige Ausdrücke mit q, so erhält man nach durchgeführter Reducirung:

$$(28) \qquad J = \Omega \left(\frac{b^2}{2} + 2i^2\right) = \Omega j^2,$$

eine Formel, deren Bedeutung leicht zu erklären ist.

$\Omega \frac{b^2}{2}$ als Ausdruck für das Trägheitsmoment des Pfeilers angenommen, hat die Voraussetzung zur Folge, dass in jedem Querschnitte der beiden Säulen gleicher Druck oder Zug herrsche, was nicht genau ist, weil jede Säule nicht nur gedrückt oder gezogen, sondern auch gebogen wird. Die Vergrösserung des Widerstandes des Systemes in Folge dieser Biegungsarbeit der Säulen ist durch den Ausdruck $2i^2$ dargestellt, zu welchem man, wie (28) zeigt, $\frac{b^2}{2}$ addiren muss, um j^2, das Quadrat des Trägheitsradius des Pfeilers zu erhalten.

Mittelst (28) ergibt (27):

$$(27') \qquad \mu_{mq} = \frac{2i^2}{b^2 + 4i^2} (M + 2Qma + qm^2a^2),$$

welches wir definitiv als angenäherten Ausdruck für μ_{mq} annehmen werden.

Dieser Ausdruck genügt, abgesehen von q, den n—1 Zwischengleichungen des Systemes (26) in strenger Weise, aber nicht der ersten und letzten Gleichung, ausgenommen der Fall, wenn sich die Inanspruchnahme auf das Moment M reducirt, wobei (27′) vollkommen genau ist. Andererseits ist es klar, dass (27′), mit Bezug auf 2Q, für $m = 0$ nicht gelten kann, weil unter der Voraussetzung, dass die Inanspruchnahme nur auf 2Q reducirt sei, $\mu_{0q} = 0$ würde, was im

Allgemeinen nicht sein kann. Unter dieser Annahme reducirt sich das zweite Glied der ersten Gleichung (26) auf:

$$Qa\left(1-\frac{O}{o}\right)$$

eine nothwendig negative Grösse, weil immer

$$O > o.$$

Wenn man die Formeln des Systemes (26) und die voraussichtliche Art der Deformirung, welche durch 2 Q erzeugt wird, in Betracht zieht, kann man schliessen, dass der aus (26) für μ_{0q} erhaltene Werth negativ wird [1]). In der That zeigen gewöhnlich die Achsen der Säulen bei der Deformation des Pfeilers, welche durch die Kraft 2 Q hervorgebracht wird, einen Flexionspunkt im oberen Theile wegen der Befestigung im Pfeilerkopfe (Fig. 10).

Dagegen ist das Moment μ_{nq} im oberen befestigten Querschnitte positiv, wie man auch aus der $m+1$. Gleichung (26) schliessen kann, ausserdem können wir noch annäherungsweise ersehen, dass sich sein Werth jenem, aus (27′) erhalten, nähert.

Deuten wir schliesslich noch die Bedingung an, welcher die geometrischen Elemente des Pfeilers entsprechen müssten, damit unter Annahme der Kraft 2 Q der Ausdruck (27′) in strenger Weise auch der ersten und letzten Gleichung (26) genügt. Durch Substituirung von (27′) in besagte Gleichungen ergibt sich diese Bedingung [2]) in höchst einfacher Weise mit:

$$o = 3O,$$

eine praktisch unzulässige Bedingung. Danach müsste $\Omega < \omega$ oder E_1 bedeutend kleiner als E sein, d. h. die Säulen sollten schwächer als die Stangen, oder aus einem viel elastischeren Materiale als die Stangen sein. Nur in einem solchen Falle könnte die Deformirung nach dem in Fig. 11 gezeichneten Schema stattfinden.

Aus der vorangegangenen Discussion können wir daher schliessen:

Der Ausdruck (27′) für das Biegungsmoment μ_{mq}

---

[1]) Siehe das folgende Zahlenbeispiel. — Erinnern wir uns, dass sich nach den Beziehungen (2) die Ausdrücke: positiv, negativ auf die linke Säule Ω' beziehen.

[2]) Siehe die Verallgemeinerung dieser Bedingung im §. 4 (Anhang).

a) ist in Bezug auf M strenge genau;

b) kann in Bezug auf 2 Q für die Zwischen-Knotenpunkte als genügend genau betrachtet werden, aber nicht so für die äussersten [1]), speciell für die oberen;

c) ist von bemerkenswerther Annäherung für $2q$, wenn man sich diese Jnanspruchnahme an den Knotenpunkten concentrirt denkt.

Mit Zuhilfenahme von (27′),

$$\varphi = \frac{b^2}{b^2 + 4i^2} \tag{29}$$

gesetzt, ergibt (20) nach der Substitution in strenger Weise die Formeln:

$$\mathfrak{M}_m = \varphi M_m$$
$$\mathfrak{N}_m = \varphi Q_m a,$$

welche zeigen, dass es nach der angenäherten Lösungsmethode genügt, die Verschiebungen und Beanspruchungen, welche man erhält, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet, mit einem Corrections-Coëfficienten φ zu multipliciren.

Man hat daher

$$(30) \qquad (\Omega_m)_q = \frac{\varphi M_m}{b}$$
$$(\omega_m)_q = \frac{\varphi Q_m}{\sin \gamma}.$$

An dieser Stelle wird eine Anmerkung von einem gewissen praktischen Werthe vortheilhaft sein.

Nach (30) resultiren, da $\varphi < 1$, die Beanspruchungen aller Glieder des Pfeilers bei Annahme der Continuität der Säulen kleiner, als die correspondirenden Beanspruchungen unter der Voraussetzung der Gelenkigkeit in den Knotenpunkten. Dies ist aber nicht der Fall für die specifische Maximal-Beanspruchung der Säulen, wenn man die Biegung in Rechnung

---

[1]) Diese explicite, angenäherte Lösung ist in gewissem Grade bezüglich der äussersten Biegungsmomente durch eine im §. 4 (Anhang) vorgeführte analoge Lösung ergänzt, für einen Pfeiler mit horizontalen Stangen, welche mit den Säulen fest verbunden sind. Die Werthe für die äussersten Biegungsmomente, welche man aus dieser Lösung erhält, können für den vorliegenden Fall des gewöhnlichen Pfeilers immer als die oberen Grenzwerthe der wirklichen Grössen angenommen werden. (Siehe die Anmerkung im Anhange, §. 4.)

zieht; denn es ist nicht schwierig vorauszusehen, dass jene grösser ausfallen wird. Das Biegungsmoment in der Hälfte des m^{ten} Säulentheiles ist ausgedrückt durch:

$$\mu_{mq} = \frac{1}{2} (\mu_{m-1q} + \mu_{mq}) = \frac{1 - \varphi}{2} M_m$$

und daher, einen Kreisquerschnitt mit dem Radius 2i vorausgesetzt, die specifische Maximal-Beanspruchung, welche dasselbe erzeugt, gegeben durch:

$$R_\mu = \frac{2}{\Omega i} \mu_{mq} = \frac{1 - \varphi}{\Omega i} . M_m,$$

während die specifische Beanspruchung in Folge der Längenänderung mittelst (30) ausgedrückt wird:

$$R_\eta = \frac{1}{\Omega} . \frac{\varphi M_m}{b}.$$

Die totale specifische Maximal-Beanspruchung, unter Annahme der Continuität der Säulen, ist daher:

$$R_m = R_\mu + R_\eta = \frac{1}{\Omega} . \frac{b + 4i}{b^2 + 4i^2} M_m$$

und ist grösser als die correspondirende specifische Beanspruchung, welche man aus (23) unter Annahme der Gelenkigkeit an den Knotenpunkten erhält, nämlich:

$$R_m = \frac{1}{\Omega} . \frac{M_m}{b},$$

indem

$$\frac{b + 4i}{b^2 + 4i^2} > \frac{i}{b},$$

wenigstens so lange als

$$b > i.$$

§. 14. Zahlenbeispiel.

Um den Grad der Annäherung von (27′) in Bezug auf die Kraft 2Q, welches gewiss der wichtigste Theil der Beanspruchung auf Umstürzen ist, und die stark störende Beeinflussung der Befestigung an den Enden besser zu beleuchten, geben wir in Bezug auf den Pfeiler, welcher Gegenstand des Zahlenbeispieles von §. 8 ist, die zwei folgenden Reihen von Werthen für μ_q.

Mit den früheren Angaben erhält man:

$$\frac{b^2}{i^2} = 952 \cdot 3 \quad f_1 = 149 \cdot 2 \qquad \frac{2i^2}{b^2 + 4i^2} = 0 \cdot 0021.$$

$$\frac{O}{o} = 10 \cdot 5 \quad f_2 = 328 \cdot 9$$

Wenn man die Inanspruchnahme [Q] nur auf die Kraft 2 Q reducirt, die am Pfeilerkopfe wirkt, resultiren nach der strengen Lösung des §. 12 und der angenäherten Lösung des §. 13 folgende Werthe für μ_q:

Werthe von μ_{mq} in Bruchtheilen des Momentes Q a ausgedrückt	I. aus dem Systeme (26)	II. aus der Näherungsformel (27′)
$m = 0$	— 0·0386	———
1	+ 0·0131	+ 0·0042
2	+ 0·0054	+ 0·0084
3	+ 0·0132	+ 0·0126
4	+ 0·0163	+ 0·0168
5	+ 0·0225	+ 0·0210
6	+ 0·0217	+ 0·0252
7	+ 0·0436	+ 0·0294

Diese Serie von Werthen bestätigt die Bemerkungen und Schlüsse des vorhergehenden Paragraphen. Nach der strengen Lösung I. erscheint für den oberen, fest eingespannten Querschnitt ein negatives und im unteren ein positives Moment von ziemlicher Grösse [1]).

Die Störung in Folge der Befestigung der Enden pflanzt sich von Knoten zu Knoten nach der Höhe des Pfeilers fort und offenbart sich nach demselben Gesetze wie die Werthe der genauen Serie I, welche abwechselnd grösser und geringer ausfallen als jene der annäherungsweisen Serie II, welche nach einem linearen Gesetze wachsen. Diese Störung, welche an den ersten oberen Knotenpunkten sehr stark, an den unteren wenig bemerkbar ist, wird gegen die Mitte des Pfeilers kaum fühlbar, wo auch die Werthe der beiden Reihen beinahe zusammenfallen.

---

[1]) Vergleiche die in der Anmerkung des §. 4 (Anhang) gegebenen Werthe.

§. 15. Tabelle der inneren, totalen Beanspruchungen in Folge von [P] und [Q].

Aus (17) und (30) mit Berücksichtigung von (2′) erhält man für die totale Beanspruchung der Glieder des Pfeilers die Ausdrücke:

$$\left.\begin{matrix}[\Omega'_m] \\ [\Omega''_m]\end{matrix}\right\} = (1 - \psi r) P_m \mp \frac{\varphi M_m}{b}$$

$$\left.\begin{matrix}[\omega'_m] \\ [\omega''_m]\end{matrix}\right\} = \psi r \frac{P_m}{\cos\gamma} \mp \frac{\varphi Q_m}{\sin\gamma}$$

$$[\varrho_m] = \psi r \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot\gamma}.$$

Die Bedeutung der in diesen Formeln erscheinenden Bezeichnungen sind erklärt durch:

$$\psi = \frac{O}{Or + 2Oo + or} \qquad \varphi = \frac{b^2}{b^2 + 4i^2}$$

$2P_m$ = Vertical-Componente
$2Q_m$ = Horizontal-Componente
M_m = Moment in Bezug auf den Punkt B

} von allen äusseren Kräften, welche den Pfeiler oberhalb des m^{ten} Feldes beanspruchen.

II. Abschnitt.

Der prismatische Pfeiler.

I. Capitel.

Bezeichnungen und Fundamental-Formeln.

§. 16. Bezeichnungen.

Das geometrische Schema des prismatischen Pfeilers besteht aus vier verticalen Säulen, welche im Rechtecke angeordnet, durch Gitterstäbe in Form eines Andreas-Kreuzes auf den Seitenflächen und durch innere horizontale Diagonalstangen an den Knotenpunkten verbunden sind. (Fig. 12, Taf. III.)

Die Inanspruchnahme setzen wir in Bezug auf eine Mittelebene $\overline{ss}$ des Pfeilers als symmetrisch voraus und die Kräfte parallel zu derselben wirkend; deshalb, wenn man die Querschnitte der vier Säulen, der correspondirenden Gitterstäbe auf den gegenüberliegenden Seitenflächen

und der inneren Diagonalstangen als gleich voraussetzt, wird die Deformation in Bezug auf die Ebene $\overline{ss}$ symmetrisch ausfallen.

Mit ganz analogen Bezeichnungen, wie bei dem einfachen Wandpfeiler, benennen wir:

P' — jede der beiden Verticalbelastungen, auf den Pfeilerkopf wirkend (ein nicht deformirbarer, parallelepipedischer Körper) über den Achsen der Säulen Ω', Ω'.

P'' — jede der beiden analogen Belastungen der Säulen Ω'', Ω''.

P' und P'' werden wir in der Abhandlung ersetzen durch die im Centrum des Pfeilerkopfes wirkende Belastung $4P$ und das Moment $2M$, welches durch die Beziehungen bestimmt ist:

$$4P = 2(P' + P'')$$
$$2M = (P'' - P')\,\mathbf{b}.$$

$4p$ — das specifische Eigengewicht des Pfeilers, in den Säulen concentrirt, daher ist p das specifische Eigengewicht jeder Säule.

$4q$ — die specifische Horizontalkraft, welche der Höhe nach an dem Pfeiler gleichförmig vertheilt ist und an den Säulen wirkt, weshalb q die Kraft ist, welche jede Säule beansprucht.

Q und q nehmen wir als positiv im Sinne von Ω' gegen Ω'' wirkend an.

$\xi'_m\,\eta'_m\,\zeta'_m$, $\xi''_m\,\eta''_m\,\zeta''_m$ — die Verschiebungen der Knotenpunkte m' und m'' nach drei orthogonalen Achsen, parallel zu den Seitenflächen des Pfeilers, wobei die η im Sinne nach unten und die ξ und ζ im Sinne der Verlängerung der horizontalen Stangen des Gitterwerkes der Seitenflächen als positiv gezählt werden. (Fig. 13.)

Nachdem wir für die Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega''}$ dieselben Bezeichnungen wie jene für den einfachen Wandpfeiler anwenden, unterscheiden wir die auf die beiden Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$ und $\overline{\Omega''\Omega''}$ bezüglichen Elemente durch ein Sternchen. Wir nennen also:

ω^*, ϱ^*, γ^*, $\mathbf{b}^*$ die Werthe, deren correspondirende Grössen der Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega''}$ mit denselben Buchstaben bezeichnet werden;

$[\omega'_m]^*$ — die beiden m^{ten} geneigten Stangen } für die Seitenfläche $\overline{\Omega'\Omega'}$
$[\varrho'_m]^*$ — die m^{te} Horizontalstange
$[\omega''_m]^*$ — die beiden m^{ten} geneigten Stangen } für die Seitenfläche $\overline{\Omega''\Omega''}$
$[\varrho''_m]^*$ — die m^{te} Horizontalstange

Mit denselben Zeichen benennen wir die Beanspruchungen der erwähnten Stangen. Ferner benennen wir:

σ — den constanten Querschnitt der inneren Diagonalstangen;

$[\sigma_m]$ — die m^{te} innere Diagonale und ihre Inanspruchnahme;

δ — den Winkel der Diagonalen mit der Seitenfläche $\overline{\Omega'\Omega''}$;

X'_m, X''_m — die Horizontal-Componenten, parallel zur ξ-Achse, der Beanspruchungen jener Stangen, welche in den Knotenpunkten m' und m'' zusammelanufen, im Sinne von ξ' und ξ'' als positiv gezählt;

Z'_m, Z''_m — die analogen Componenten, parallel zur ζ-Achse, im Sinne von ζ' und ζ'' als positiv gezählt;

I, i — das Trägheits-Moment und den Trägheits-Radius jeder Säule in Bezug auf Biegung in der Ebene $\overline{\xi\eta}$;

J, j — dieselben Grössen für den Pfeiler;

I*, i* — die mit I und i analogen Grössen, in Bezug auf Biegung in der Ebene $\overline{\zeta\eta}$;

$\mu'_m\ \mu''_m$, $\tau_m'\ \tau_m''$ — die zur Ebene $\overline{\xi\eta}$ parallelen Componenten der Biegungsmomente der beiden Säulen in den Knotenpunkten m' und m'' und die abscheerenden Kräfte oberhalb dieser Knotenpunkte.

$\mu'_m{}^*\ \mu''_m{}^*$ — die analogen Componenten, parallel zur Ebene $\overline{\zeta\eta}$.

Ferner setzen wir noch fest, dass bei der Anwendung der Gleichungen des continuirlichen Trägers auf das Studium der Biegung der Säulenachsen, projicirt auf die Ebenen $\overline{\xi\eta}$ und $\overline{\zeta\eta}$, der Sinn, nach welchem man bei der Behandlung des continuirlichen Trägers die Belastungen wirkend annimmt, für die Säule Ω' mit dem Sinne von $-\xi'$ und $-\zeta'$ und für die Säule Ω'' mit dem Sinne von $-\xi''$ und $-\zeta''$ correspondirt.

Wenn man die Ausdrücke für die Beanspruchungen in Functionen der Verschiebungen darstellt, mit der Beachtung, dass sich die Beanspruchungen der Säulentheile und der geneigten Stangen als Drücke und jene de:

horizontalen Stangen und der inneren Diagonalen als Züge ergeben, so erhält man:

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
[\Omega'_m] &= (\eta'_{m-1} - \eta'_m)\,\frac{E_1\,\Omega}{a}\\
[\Omega''_m] &= (\eta''_{m-1} - \eta''_m)\,\frac{E_1\,\Omega}{a}\\
[\omega'_m] &= [(\eta''_{m-1} - \eta'_m)\cos\gamma - (\xi''_{m-1} + \xi'_m)\sin\gamma]\,\frac{E\,\omega}{a}\cos\gamma\\
[\omega''_m] &= [(\eta'_{m-1} - \eta''_m)\cos\gamma - (\xi'_{m-1} + \xi''_m)\sin\gamma]\,\frac{E\,\omega}{a}\cos\gamma\\
[\omega'_m]^* &= [(\eta'_{m-1} - \eta'_m)\cos\gamma^* - (\zeta'_{m-1} + \zeta'_m)\sin\gamma^*]\,\frac{E\,\omega^*}{a}\cos\gamma^*\\
[\omega''_m]^* &= [(\eta''_{m-1} - \eta''_m)\cos\gamma^* - (\zeta''_{m-1} + \zeta''_m)\sin\gamma^*]\,\frac{E\,\omega^*}{a}\cos\gamma^*\\
[\varrho_m] &= (\xi'_m + \xi''_m)\,\frac{E\,\varrho}{a}\cot\gamma\\
[\varrho'_m]^* &= 2\,\zeta'_m\,\frac{E\,\varrho^*}{a}\cot\gamma^*\\
[\varrho''_m]^* &= 2\,\zeta''_m\,\frac{E\,\varrho^*}{a}\cot\gamma^*\\
[\sigma_m] &= [(\xi'_m + \xi''_m)\cos\delta + (\zeta'_m + \zeta''_m)\sin\delta]\,\frac{E\,\sigma}{a}\cot\gamma\,\cos\delta =\\
&= [\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,]\,\frac{E\,\sigma}{a}\cot\gamma^*\sin\delta
\end{aligned}
$$

§. 17. Fundamental-Lehrsatz.

Wie bei dem Studium des einfachen Pfeilers, werden wir auch hier die äusseren Kräfte nach zwei Systemen gruppiren, welche bestehen aus:

A. Den verticalen, symmetrischen Belastungen 4P und $4p$, welche wir das System der Beanspruchung auf Zerknickung [P] nennen werden.

B. Den horizontalen Kräften 4Q und $4q$ und dem Momente 2M, welche wir das System der Beanspruchung auf Umstürzen [Q] benennen werden.

Diese Theilung der äusseren Kräfte nach den Beanspruchungen [P] und [Q] ist durch den folgenden Lehrsatz bedingt, welcher eine Erweiterung desjenigen vom einfachen Pfeiler ist.

Lehrsatz:

I. Die Summen der homologen Verschiebungen der Knotenpunkte m' und m''

$$\xi'_m + \xi''_m, \quad \eta'_m + \eta''_m, \quad \zeta'_m + \zeta''_m$$

hängen nur von der Beanspruchung [P] *ab und sind von* [Q] *unabhängig.*

II. Die Differenzen der homologen Verschiebungen

$$\xi''_m - \xi'_m, \quad \eta''_m - \eta'_m, \quad \zeta''_m - \zeta'_m$$

hängen nur von der Beanspruchung [Q] *ab und sind von* [P] *unabhängig.*

Wenn wir die Wirkung dieser beiden Inanspruchnahmen trennen, so wird die Deformation des Pfeilers durch die Einwirkung jeder derselben wie folgt bestimmt:

I. In Folge der Inanspruchnahme [Q] deformiren sich die Achsen der Säulen derart, dass die beiden Knotenpunkte m' nach oben sich nähern, während die beiden Knotenpunkte m'' nach unten sich entfernen, und zwar um die gleiche Grösse; alle vier sind denselben Verschiebungen im Sinne von [Q] unterworfen. (Fig. 18, Taf. IV.)

II. In Folge der Inanspruchnahme [P] deformiren sich die Achsen der Säulen derart, dass die vier m^{ten} Knotenpunkte gleiche und in Bezug auf die Mittelebene des Pfeilers symmetrische Verschiebungen erleiden.

Wir werden an passender Stelle das Gesetz der Curven der so deformirten Achsen untersuchen.

Den allgemeinen Beweis des I. Theiles des Lehrsatzes kann man durch eine Reihe analoger Schlüsse erbringen, wie selbe für den einfachen Pfeiler im §. 2 vorgebracht wurden, indem man beachtet, dass das System, welches man durch Summirung der homologen Gleichgewichts-Gleichungen erhält, nur die Summen der Verschiebungen enthält und zur Bestimmung derselben, unabhängig von [Q], genügt. Wir werden aber auch in diesem Falle vorziehen, den Leser auf die Resultate der folgenden Abhandlung zu verweisen, in welcher [P] und [Q] als gleichzeitig wirkend angenommen sind, und deshalb in strenger Weise die Richtigkeit des I. Theiles des erwähnten Fundamental-Lehrsatzes bewiesen wird. Die Richtigkeit des II. Theiles kann auch in diesem Falle wegen der Symmetrie erkannt werden.

Mit Berücksichtigung von (31) und der Formeln des continuirlichen Trägers auf verschieden hohen Stützen kann man aus dem Lehrsatze ableiten den

Folgesatz:

I. Die Summen der homologen inneren Kräfte:

$$[\Omega'_m] + [\Omega''_m], \quad [\omega'_m] + [\omega''_m], \quad [\omega'_m]^* + [\omega''_m], \quad [\varrho'_m]^* + [\varrho''_m]^*$$

und der parallelen Componenten der homologen Biegungsmomente:

$$\mu'_m + \mu''_m, \quad \mu'_m{}^* + \mu''_m{}^*,$$

ebenso wie die inneren Kräfte der horizontalen Stangen, welche parallel zur Inanspruchnahme sind, und der Diagonalstangen

$$[\varrho_m], \quad [\sigma_m]$$

hängen nur von [P] *ab und sind unabhängig von* [Q].

II. Die Differenzen der homologen inneren Kräfte:

$$[\Omega''_m] - [\Omega'_m], \quad [\omega''_m] - [\omega'_m], \quad [\omega''_m]^* - [\omega'_m]^*, \quad [\varrho''_m] - [\varrho'_m]$$

und der parallelen Componenten der homologen Momente:

$$\mu'_m - \mu''_m, \quad \mu'_m{}^* - \mu''_m{}^*$$

hängen nur von [Q] *ab und sind unabhängig von* [P].

Die Folgerungen aus dem Erwähnten werden wir an anderer Stelle entwickeln.

§. 18. Bezeichnungen.

Auf Grund der vorstehenden Principien werden wir annehmen:

$$(32) \quad \begin{array}{llll}
\xi'_m + \xi''_m = 2\,\xi_{mp} & & \xi''_m - \xi'_m = 2\,\xi_{mq} \\
\eta'_m + \eta''_m = 2\,\eta_{mp} & & \eta''_m - \eta'_m = 2\,\eta_{mq} \\
\zeta'_m + \zeta''_m = 2\,\zeta_{mp} & & \zeta''_m - \zeta'_m = 2\,\zeta_{mq} \\
\mu'_m + \mu''_m = 2\,\mu_{mp} & & \mu'_m - \mu''_m = 2\,\mu_{mq} \\
\mu'_m{}^* + \mu''_m{}^* = 2\,\mu_{mp}{}^* & & \mu''_m{}^* - \mu'_m{}^* = 2\,\mu_{mq}{}^* \\
[\Omega'_m] + [\Omega''_m] = 2[\Omega_m]_p & & [\Omega''_m] - [\Omega'_m] = 2[\Omega_m]_q \\
[\omega'_m] + [\omega''_m] = 2[\omega_m]_p & & [\omega''_m] - [\omega'_m] = 2[\omega_m]_q \\
[\omega'_m]^* + [\omega''_m]^* = 2[\omega_m]_p{}^* & & [\omega''_m]^* - [\omega'_m]^* = 2[\omega_m]_q{}^* \\
[\varrho'_m]^* + [\varrho''_m]^* = 2[\varrho_m]_p{}^* & & [\varrho''_m]^* - [\varrho'_m]^* = 2[\varrho_m]_q{}^* \\
Z'_m + Z''_m = 2\,Z_{mp} & & Z''_m - Z'_m = 2\,Z_{mq}
\end{array}$$

$$X'_m + X''_m = 2\,X_{mp}.$$

Nach dem Fundamental-Lehrsatze werden die Zeichen mit dem Index p und jene mit dem Index q die Componenten der Verschiebungen, Kräfte etc. in Folge der respectiven Wirkung von [P] und [Q] bezeichnen.

Schliesslich fügen wir noch eine Reihe von allgemeinen Bezeichnungen in Bezug auf die reducirten Querschnitte bei:

$$\mathrm{O} = \mathrm{E}_1 \Omega$$

$$\mathrm{r} = \mathrm{E}\varrho \cot^3\gamma \qquad \mathrm{o} = \mathrm{E}\omega \cos^3\gamma \qquad \mathrm{s} = \mathrm{E}\sigma \cot^3\gamma \cos^3\delta$$

$$\mathrm{r}^* = \mathrm{E}\varrho^* \cot^3\gamma^* \qquad \mathrm{o}^* = \mathrm{E}\omega^* \cos^3\gamma^* \qquad = \mathrm{E}\sigma \cot^3\gamma^* \sin^3\delta$$

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{o}}{\mathrm{o}+\mathrm{O}+\mathrm{o}^*} \qquad \mathrm{U} = \frac{\mathrm{O}\,\mathrm{o}}{\mathrm{o}+\mathrm{O}+\mathrm{o}^*}$$

$$(33) \qquad \mathrm{W}^* = \frac{\mathrm{o}^*}{\mathrm{o}+\mathrm{O}+\mathrm{o}^*} \qquad \mathrm{U}^* = \frac{\mathrm{O}\,\mathrm{o}^*}{\mathrm{o}+\mathrm{O}+\mathrm{o}^*}$$

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{o}\,\mathrm{o}^*}{\mathrm{o}+\mathrm{O}+\mathrm{o}^*}$$

$$\mathrm{w}^* = \frac{\mathrm{o}^*}{\mathrm{O}+\mathrm{o}^*} \qquad \mathrm{u}^* = \frac{\mathrm{O}\,\mathrm{o}^*}{\mathrm{O}+\mathrm{o}^*}.$$

Diese Bezeichnungen sind in vollkommener Uebereinstimmung mit jenen des einfachen Pfeilers, und die Formeln, welche wir entwickeln, werden die Analogie klar zeigen.

Bei der folgenden Abhandlung werden wir immer nur eine der beiden Hälften des durch die Symmetrie-Ebene der Inanspruchnahme $\overline{ss}$ getheilten Pfeilers in Betracht ziehen, d. h. wir werden den Factor 2, welcher sich für alle Formeln des Systemes ergeben würde, weglassen.

II. Capitel.

Bestimmung der halben Summen ξ_{mp} η_{mp} ζ_{mp} etc.

(Componenten in Folge der Inanspruchnahme [P].)

§. 19. Gleichgewichts-Gleichungen.

Für das verticale Gleichgewicht des Pfeilertheiles, welcher sich ober dem m^{ten} Felde befindet, hat man die Bedingung:

$$[\Omega'_m] + [\Omega''_m] + ([\omega'_m] + [\omega''_m]) \cos\gamma + ([\omega'_m]^* + [\omega''_m]^*) \cos\gamma^* =$$
$$= 2\mathrm{P} + (2m - 1)\, p\, \mathrm{a} = 2\mathrm{P}_m.$$

Transformirt man dieselbe mittelst (31), indem man die Bezeichnungen (32) und (33) berücksichtigt und den Zeiger m von 1 bis n variiren lässt, so erhält man mit Beachtung von:

$$\xi_{op} = \zeta_{op} = \xi_{np} = \eta_{np} = \zeta_{np} = 0$$

das System:

$$\eta_{op} - \eta_{1p} = \frac{P_1 a}{o + O + o^*} + \frac{bW}{a} \xi_{1p} + \frac{b^*W^*}{a} \zeta_{1p}$$

. . . .

$$(34) \quad \eta_{m-1p} - \eta_{mp} = \frac{P_m a}{o + O \cdot o^*} + \frac{bW}{a} (\xi_{m-1p} + \xi_{mp}) + \frac{b^*W^*}{a} (\zeta_{m-1p} + \zeta_{mp})$$

. . . .

$$\eta_{n-p} = \frac{P_n a}{o + O + o^*} + \frac{bW}{a} \xi_{m-1p} + \frac{b^*W^*}{a} \zeta_{m-1p}.$$

Durch aufeinander folgende Summirung erhält man die η_p in Functionen von ξ_p ζ_p.

Durch Projection der inneren Kräfte der in m' und m'' zusammenlaufenden Stangen auf die Achse der ξ erhält man die Gleichungen:

$$(35) \quad \begin{aligned} X'_m &= ([\omega'_m] + [\omega''_{m+1}]) \sin \gamma - [\varrho_m] - [\sigma_m] \cos \delta \\ X''_m &= ([\omega''_m] + [\omega'_{m+1}]) \sin \gamma - [\varrho_m] - [\sigma_m] \cos \delta \end{aligned}$$

Und auf gleiche Weise durch Projection derselben Kräfte auf die Achse der ζ:

$$(36) \quad \begin{aligned} Z'_m &= ([\omega'_m]^* + [\omega'_{m+1}]^*) \sin \gamma^* - [\varrho'_m]^* - [\sigma_m] \sin \delta \\ Z''_m &= ([\omega''_m]^* + [\omega''_{m+1}]^*) \sin \gamma^* - [\varrho''_m]^* - [\sigma_m] \sin \delta. \end{aligned}$$

Wenn man die Gleichungen (35) und ebenso jene (36) unter einander summirt und die erhaltenen Gleichungen, bei Berücksichtigung von (32), mittelst (31) transformirt, erhält man zwei Ausdrücke für X_{mp} und Z_{mp}, welche die halben Summen der verticalen Verschiebungen nur in Form der Differenz:

$$\eta_{m-1p} - \eta_{m+1p}.$$

Eliminirt man dieselben durch die Gleichung, welche man durch Summirung der m^{ten} und $m + 1^{ten}$ Gleichung des Systemes (34) erhält, bei Berücksichtigung der Bezeichnungen (33), so erhält man nach durchgeführter Reducirung:

$$(37)\quad X_{mp} = \frac{bW}{a}(P_m + P_{m+1}) - \frac{b^2}{a^3}[(U + V)\xi_{m-1p} + 2(U + V + r + s)\xi_{mp} + (U + V)\xi_{m+1p}] + \frac{bb^*}{a^3}[V\zeta_{m-1p} + 2(V - s)\zeta_{mp} + V\zeta_{m+1p}],$$

$$(38)\quad Z_{mp} = \frac{b^*W^*}{a}(P_m + P_{m+1}) - \frac{b^{*2}}{a^3}[(U^* + V)\zeta_{m-1p} + 2(U^* + V + r^* + s)\zeta_{mp} + (U^* + V)\zeta_{m+1p}] + \frac{bb^*}{a^3}[V\xi_{m-1p} + 2(V - s)\xi_{mp} + V\xi_{m+1p}],$$

die Fundamental-Gleichungen für die Lösung der Aufgabe. Man beachte deren Analogie mit (7).

§. 20. Lösung der Aufgabe, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet.

Unter dieser Annahme sind die Bedingungen für das horizontale Gleichgewicht der Knotenpunkte m' und m'' ausgedrückt durch:

$$X'_m - q\,a = 0 \qquad Z'_m = 0$$
$$X''_m + q\,a = 0 \qquad Z''_m = 0$$

und daraus ergibt sich durch Summirung:

$$X_{mp} = 0 \qquad Z_{mp} = 0.$$

Die (37) und (38), für $m = 1$ bis $m = n - 1$ anwendbar, bilden daher zwei Systeme, jedes von $n - 1$ Gleichungen zwischen ξ_p und ζ_p von der allgemeinen Form:

$$(39)\quad b\,(U + V)\xi_{m-1p} + 2b\,(U + V + r + s)\xi_{mp} + b\,(U + V)\xi_{m+1p} - b^*V\zeta_{m-1p} - 2b^*(V - s)\zeta_{mp} - b^*V\zeta_{m+1p} = W\,a^2(P_m + P_{m+1}).$$

$$(40)\quad b^*(U^* + V)\zeta_{m-1p} + 2b^*(U^* + V + r^* + s)\zeta_{mp} + b^*(U^* + V)\zeta_{m+1p} - b\,V\xi_{m-1p} - 2b\,(V - s)\xi_{mp} - b\,V\xi_{m+1p} = W^*a^2(P_m + P_{m+1})$$

Der Kürze wegen werden wir die Endgleichungen nicht schreiben sondern erinnern uns nur, dass für dieselben:

$$\xi_{op} = \zeta_{op} = \xi_{np} = \zeta_{np} = 0.$$

Für einen Pfeiler mit quadratischem Grundrisse hat man: $\delta = 45^0 \quad b = b^* \quad \gamma = \gamma^*$,
und wenn man weiter annimmt: $\omega = \omega^* \quad \varrho = \varrho^*$
wird auch: $r = r^* \quad W = W^* \quad U = U^*$.

Die beiden Systeme (39) und (40) werden identisch und daher $\xi_p = \zeta_p$, was auch einleuchtend ist wegen der vollkommenen Symmetrie der Deformation, die von [P] hervorgebracht wird und welche die Säulen nach ebenen Curven biegt, die in den Diagonal-Ebenen des Pfeilers liegen.

Das einzige System, in welches die beiden (39) und (40) zusammenfallen, macht die V verschwinden und ergibt sich, mit Hinweglassung der Sternchen, in der Form:

$$U\xi_{m-1p} + 2(U + r + 2s)\xi_{mp} + U\xi_{m+1p} = \frac{Wa^2}{b}(P_m + P_{m+1})$$

und unterscheidet sich vom Systeme (8) des einfachen Pfeilers nur durch die Einsetzung von: U, W, r + 2s für: u, w, r.

§. 21. **Die Continuität und Befestigung der Enden der Säulen in Rechnung gezogen.**

Die Bestimmung von ξ_p und ζ_p erfolgt unter dieser Voraussetzung, indem man das System (o) (Einleitung IV) auf das Studium der Biegung der Achsen der Säulen, projicirt auf die Ebenen $\overline{\xi\eta}$ und $\overline{\zeta\eta}$, anwendet.

Für das Studium der Biegung in der Ebene $\overline{\xi\eta}$ muss man in (o) die Bezeichnungen vertauschen, wie schon für den einfachen Pfeiler bestimmt wurde, und erhält ein mit (9) identisches System von der allgemeinen Form:

$$(41)\quad X_{m-1p} + 4X_{mp} + X_{m+1p} = \frac{6\,O\,i^2}{a^3}(\xi_{m-2p} - 4\xi_{m-1p} + 6\xi_{mp} - 4\xi_{m+1p} + \xi_{m+2p})$$

Für die Biegung in der Ebene $\overline{\zeta\eta}$ muss man (o) transformiren, indem man setzt:

$$l = a \quad E = E_1 \quad I = I^* = \Omega i^{*2} \quad q = 0 \quad x_o = x_n = t_o = t_n = 0$$

und ferner für die Säule Ω':

$$X_m = Z'_m \quad x_m = -\zeta'_m$$

und für die Säulen Ω'':

$$X_m = Z''_m \quad x_m = -\zeta''_m.$$

Durch Summirung der correspondirenden Gleichungen der beiden Systeme und Berücksichtigung der gewöhnlichen Bezeichnungen erhält man ein System von der allgemeinen Form:

$$(42)\quad Z_{m-1p} + 4Z_{mp} + Z_{m+1p} = \frac{6\,O\,i^{*2}}{a^3}(\zeta_{m-2p} - 4\zeta_{m-1p} + 6\zeta_{mp} - 4\zeta_{m+1p} + \zeta_{m+2p}).$$

Die Substituirung der Ausdrücke (37) und (38) von X_{mp} und Z_{mp} in den Systemen (41) und 42) führt zu zwei Systemen, jedes von $n-1$ Gleichungen zwischen ξ_p und ζ_p von der Form:

$$(43)\quad \begin{aligned} &A_1\xi_{m-2p} + A_2\xi_{m-1p} + A_3\xi_{mp} + A_2\xi_{m+1p} + A_1\xi_{m+2p} - \\ &- B_1\zeta_{m-2p} - B_2\zeta_{m-1p} - B_3\zeta_{mp} - B_2\zeta_{m+1p} - B_1\zeta_{m+2p} = \\ &= 12W\ a^2b\,(P + mpa). \end{aligned}$$

$$(44)\quad \begin{aligned} &A_1^*\zeta_{m-2p} + A_2^*\zeta_{m-1p} + A_3^*\zeta_{mp} + A_2^*\zeta_{m+1p} + A_1^*\zeta_{m+2p} - \\ &- B_1^*\xi_{m-2p} - B_2^*\xi_{m-1p} - B_3^*\xi_{mp} - B_2^*\xi_{m+1p} - B_1^*\xi_{m+2p} = \\ &= 12W^*\ a^2b\,(P + mpa). \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Coëfficienten A und B ist folgende:

$$(45)\quad \begin{aligned} A_1 &= (U+V)\,b^2 + 6Oi^2 & B_1 &= V b b^* \\ A_2 &= [\,6(U+V) + 2(r+s)]\,b^2 - 24Oi^2 & B_2 &= (\,6V - 2s)\,b b^* \\ A_3 &= [10(U+V) + 8(r+s)]\,b^2 + 36Oi^2 & B_3 &= (10V - 8s)\,b b^* \end{aligned}$$

während sich die Coëfficienten A^* und B^* aus A und B ableiten, indem man U, r, b, i in U^*, r^*, b^*, i^* respective umwandelt.

Die Endgleichungen der Systeme (43) und (44) lassen wir der Kürze wegen aus, man kann dieselben leicht durch Analogie aus dem Systeme (10) des einfachen Pfeilers erhalten.

Wenn man den Pfeiler von quadratischem Grundrisse und die Querschnitte der Stangen an den Seitenflächen gleich annimmt, so fallen die Systeme (43) und (44) in ein einziges zusammen, aus deren Coëfficienten die V verschwinden. Dieses System:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_1\xi_{m-2p} + \mathfrak{A}_2\xi_{m-1p} + \mathfrak{A}_3\xi_{mp} + \mathfrak{A}_2\xi_{m+1p} + \mathfrak{A}_1\xi_{m+2p} = \\ &= 12W a^2b(P + mpa) \end{aligned}$$

ist von dem Systeme (10) nur durch die Substituirung der am Ende des vorigen Paragraphen angegebenen Coëfficienten verschieden. Die $\mathfrak{A}$ ergeben sich daher:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= Ub^2 + 6Oi^2 \\ \mathfrak{A}_2 &= (\,6U + 2r + \ 4s)\,b^2 - 24Oi^2 \\ \mathfrak{A}_3 &= (10U + 8r + 16s)\,b^2 + 36Oi^2. \end{aligned}$$

Halbe Summen μ_p und μ_p^*.

Wenn man für das Studium der Biegung der auf die Ebenen $\overline{\xi\eta}$ und $\overline{\zeta\eta}$ projicirten Säulenachsen die Formel (N) (Einleitung IV) mit den

in den Systemen (41) und (42) durchgeführten Transformationen anwendet und die so erhaltenen Paare von Gleichungen summirt, ergibt sich:

$$(46)\quad \begin{aligned} \mu_{mp} &= \frac{a}{6} X_{mp} - O \frac{i^2}{a^2} (\xi_{m-1p} - 2\xi_{mp} + \xi_{m+1p}) \\ \mu_{mp}^* &= \frac{a}{6} Z_{mp} - O \frac{i^{*2}}{a^2} (\zeta_{m-1p} - 2\zeta_{mp} + \zeta_{m+1p}) \end{aligned}$$

worin X_{mp} und Z_{mp} aus (37) und (38) zu substituiren sind.

Für den oberen und unteren befestigten Querschnitt hat man dagegen:

$$(46')\quad \begin{aligned} \mu_{0p} &= -\frac{a}{12} X_{1p} - O \frac{i^2}{a^2} (5\xi_{1p} - \xi_{2p}) \\ \mu_{0p}^* &= -\frac{a}{12} Z_{1p} - O \frac{i^{*2}}{a^2} (5\zeta_{1p} - \zeta_{2p}) \\ \mu_{np} &= -\frac{a}{12} X_{n-1p} - O \frac{i^2}{a^2} (5\xi_{n-1p} - \xi_{n-2p}) \\ \mu_{np}^* &= -\frac{a}{12} Z_{n-1p} - O \frac{i^{*2}}{a^2} (5\zeta_{n-1p} - \zeta_{n-2p}) \end{aligned}$$

Die vorhergehende Untersuchung liefert für den in §. 17 vorgebrachten I. Theil des Fundamental-Lehrsatzes einen strengen Beweis; in der Folge werden wir die

$$\xi_p,\ \eta_p,\ \zeta_p \ldots\ldots \mu_p \ldots\ldots [\omega]_p \ldots \text{ etc.}$$

und die

$$\pm\,\xi_p \pm \eta_q \ldots \mp \mu_q \ldots \pm [\omega]_q \ldots \text{ etc.}$$

entweder als die halben Summen und halben Differenzen der Verschiebungen, Biegungsmomente und homologeu Beanspruchungen betrachten, oder (wobei wir das doppelte Zeichen den Buchstaben mit dem Index q geben) als die Componenten dieser Verschiebungen, Beanspruchungen etc. in Folge der Inanspruchnahme [P] und [Q] respective.

§. 22. Explicite, angenäherte Lösung.

Beim numerischen Gebrauche der Systeme (39) und (40) oder der (43) und (44), welche sechs oder zehn aufeinander folgende Verschiebungen enthalten, ergeben sich praktische Unzukömmlichkeiten, und daher wird die explicite, angenäherte Lösung, die wir jetzt geben werden, für die Anwendung von bedeutender Wichtigkeit.

Diese Lösung, ganz analog jener bezüglich des einfachen Pfeilers (§. 7) erfolgt durch zwei Ausdrücke für die Verschiebungen ξ_{mp}, ζ_{mp}, welche den allgemeinen Gleichungen der Systeme (39), (40), (43) und (44) in strenger Weise genügen, aber nicht den Endgleichungen derselben. Der Kürze halber:

$$H = 2(U + V) + r + s \qquad H^* = 2(U^* + V) + r^* + s$$

$$K = s - 2V$$

$$(47) \qquad \Psi = \frac{WH^* - W^*K}{HH^* - K^2} \qquad \Psi^* = \frac{W^*H - WK}{HH^* - K^2}$$

gesetzt, sind diese Ausdrücke:

$$(48) \qquad \begin{aligned} \xi_{mp} &= \Psi \frac{a^2}{b} \cdot \frac{P_m + P_{m+1}}{2} \\ \zeta_{mp} &= \Psi \frac{a^2}{b^*} \cdot \frac{P_m + P_{m+1}}{2} \end{aligned}$$

Für die Ausdrücke (48) können wir die im analogen Falle bezüglich der einfachen Pfeiler gemachten Bemerkungen wiederholen. (Siehe §. 7.)

(48) genügt in strenger Weise den $n - 3$ Zwischengleichungen jedes der beiden Systeme (39) und (40), aber nicht den Endgleichungen wegen der fehlenden Glieder mit ξ_{0p}, ζ_{0p}, ξ_{np}, ζ_{np}.

Selbe genügt auch den $n - 5$ Zwischengleichungen von jedem der beiden Systeme (43) und (44) und mit einem gewissen Grade von Annäherung[1]) den Endgleichungen, wenn die Bedingungen erfüllt werden:

$$7(U + V)\, b^2 = 66\, O\, i^2$$
$$7(U^* + V)\, b^{*2} = 66\, O\, i^{*2}.$$

Ferner kann selbe auch der zweiten und vorletzten Gleichung der beiden Systeme nicht in vollkommen strenger Weise genügen.

Die Ausdrücke (48) würden nur dann die strenge Lösung geben, wenn man annehmen würde, dass die Endknotenpunkte den horizontalen

---

[1]) Wir sagen mit einem gewissen Grade von Annäherung, weil man einen kleinen Fehler bei den Ausdrücken mit V hat, selbst wenn die angeführten Bedingungen erfüllt werden. Wir bemerken aber, dass V im Allgemeinen eine sehr kleine Grösse ist.

Verschiebungen unter denselben Bedingungen, wie die Zwischenknotenpunkte unterliegen. Die Säulenachsen würden sich in diesem Falle so verschieben, dass sie geradlinig bleiben; thatsächlich erhält man aus (46) mit (48):

$$\mu_{mp} = \mu_{mp}^* = 0.$$

Wir verweilen bei diesen Betrachtungen nicht länger und verweisen auf das im §. 7 Gesagte, wo der Charakter und der Grad der Annäherung dieser expliciten Lösung genügend erläutert wurde.

Bei Annahme der Ausdrücke (48) ergeben die (31) mittelst (48) und (34) für die Beanspruchungen in Folge von [p] folgende Ausdrücke:

$$(49)\quad \begin{cases} [\Omega_m]_p = [1 - \Psi \mathrm{r} - \Psi^* \mathrm{r}^* - 2(\Psi + \Psi^*)\,\mathrm{s}]\,\mathrm{P}_m \\ [\omega_m]_p = [\Psi \mathrm{r} + (\Psi + \Psi^*)\,\mathrm{s}]\,\dfrac{\mathrm{P}_m}{\cos\gamma} \\ [\omega_m]_p^* = [\Psi^* \mathrm{r}^* + (\Psi + \Psi^*)\,\mathrm{s}]\,\dfrac{\mathrm{P}_m}{\cos\gamma^*} \\ [\varrho_m]_p = \Psi \mathrm{r}\,\dfrac{\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m+1}}{\cot\gamma} \\ [\varrho_m]_p^* = \Psi^* \mathrm{r}^*\,\dfrac{\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m+1}}{\cot\gamma^*} \\ [\sigma]_p = (\Psi + \Psi^*)\,\mathrm{s}\,\dfrac{\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m+1}}{\cot\gamma\cos\delta} = (\Psi + \Psi^*)\,\mathrm{s}\,\dfrac{\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m+1}}{\cot\gamma^*\sin\delta} \end{cases}$$

Wenn man das System als gelenkig betrachtet, genügen die (49) vollkommen den Bedingungen des Gleichgewichtes für die Knotenpunkte.

Wenn der Pfeiler von quadratischem Grundrisse ist und die Querschnitte der Stangen der vier Seitenflächen gleich sind, ergibt (47):

$$(47')\qquad \Psi = \Psi^* = \frac{\mathrm{o}}{(\mathrm{O} + 2\mathrm{o})(\mathrm{r} + 2\mathrm{s}) + 2\mathrm{O}\mathrm{o}}$$

welcher Ausdruck mit (13) verglichen werden mag.

Die (48) nehmen die Form an:

$$(48')\qquad \xi_{mp} = \zeta_{mp} = \Psi\,\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} \cdot \frac{\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m+1}}{2}$$

und die (49) die Form:

$$(49')\qquad \begin{aligned} [\Omega_m]_p &= [1 - 2\,\Psi(\mathrm{r} + 2\mathrm{s})]\,\mathrm{P}_m \\ [\omega_m]_p &= (\Psi + 2\mathrm{s})\,\frac{\mathrm{P}_m}{\cos\gamma} \\ [\varrho_m]_p &= \Psi\mathrm{r}\,\frac{\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m+1}}{\cot\gamma} \\ [\sigma_m]_p &= 2\sqrt{2}\;\Psi\,\mathrm{s}\;\frac{\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_{m+1}}{\cot\gamma}. \end{aligned}$$

Wenn die horizontalen Stangen der Seitenflächen oder die inneren Diagonalen fehlen, so kann man in den vorhergehenden Formeln $\mathrm{r} = 0$ oder $\mathrm{s} = 0$ setzen.

Aus der Discussion von (48) und (49) kann man zahlreiche Gesetze und Eigenschaften der Deformation und der bezüglichen inneren Kräfte, welche das Gleichgewicht herstellen, ableiten. Die Anwendung dieser Formeln für constructive Berechnungen[1]) behalten wir uns für später vor und beschränken uns jetzt auf die Vorführung von Vereinfachungen unter gewissen Annahmen, welche discutirt zu werden verdienen.

Setzen wir voraus, dass keine horizontalen Verschiebungen der Knotenpunkte statt haben, was man durch nicht deformirbare horizontale Stangen auf den Seitenflächen realisiren kann und analytisch ausgedrückt wird, indem man setzt: $\varrho = \varrho^* = \infty$. Unter dieser Annahme erhält man: $\Psi = \Psi^* = 0$, dagegen findet man:

$$\lim \Psi\mathrm{r} = \mathrm{W} \qquad \lim \Psi^*\mathrm{r}^* = \mathrm{W}^*.$$

Die Beanspruchungen der geneigten Stangen und der Säulentheile nehmen dann die einfache Form an:

$$(49'')\qquad \begin{aligned} [\Omega_m]_p &= (1 - \mathrm{W} - \mathrm{W}^*)\,\mathrm{P}_m \\ [\omega_m]_p &= \mathrm{W}\,\frac{\mathrm{P}_m}{\cos\gamma} \\ [\omega_m]^*_p &= \mathrm{W}^*\,\frac{\mathrm{P}_m}{\cos\gamma^*} \end{aligned}$$

und haben unter sich die sehr einfachen Verhältnisse:

$$\frac{[\Omega_m]_p}{[\omega_m]_p} = \frac{\mathrm{O} - \mathrm{o}^*}{\mathrm{o}} \quad \frac{[\Omega_m]_p}{[\omega_m]_p^*} = \frac{\mathrm{O} - \mathrm{o}}{\mathrm{o}^*} \quad \frac{[\Omega_m]}{[\omega_m]_p + [\omega_m]_p^*} = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o} + \mathrm{o}^*}.$$

[1]) Siehe III. Theil: Constructive Aufgaben.

Setzt man dagegen die inneren Diagonalstangen als nicht deformirbar voraus, so sind die horizontalen Verschiebungen der Knotenpunkte nicht aufgehoben, welche nun in Folge einer Drehung der Diagonalstangen stattfinden. Setzt man $\sigma = \infty$, so findet man:

$$\lim \Psi = -\lim \Psi^* = \frac{W - W^*}{r + 2(U + 4V + U^*) + r^*}.$$

Die Gleichheit und das entgegengesetzte Zeichen der Grenzen von Ψ und Ψ^* kann auch aus (48) abgeleitet werden, wenn man bemerkt, dass unter den angegebenen Bedingungen die Deformation (Fig. 14) entsprechen muss für:

$$\frac{\xi_{mp}}{\zeta_{mp}} = -\frac{b^*}{b}.$$

Wenn $W = W^*$, dann ist: $o = o^*$ und jede Verschiebung der Knotenpunkte Null; diese Bedingung annäherungsweise für den bestimmten Fall von begrenzten Werthen für σ verallgemeinert, kann als jene für die bessere Inanspruchnahme der inneren Diagonalstangen angenommen werden.

Die Discussion der Formeln (46') mit Bezug auf den quadratischen Pfeiler führt auf einfachere Weise zu Resultaten, welche analog einigen der vorhergehenden sind. Die Beziehung zwischen der Beanspruchung des Säulentheiles und jener einer geneigten Stange ergibt sich ohne weitere Annahme mit:

$$\frac{[\Omega_m]_p}{[\omega_m]_p} = \left(\frac{O - o}{o} + \frac{2O}{r + 2s}\right) \cos\gamma.$$

III. Capitel.

Bestimmung der halben Differenzen ξ_{mq} η_{mq} ζ_{mq} etc.

(Componenten in Folge der Beanspruchung [Q].)

§. 23. Allgemeine Gesetze der Deformation und des Systemes der inneren Kräfte, welche durch [Q] hervorgebracht werden.

Aus dem Fundamental-Lehrsatze und Folgesatze (§. 17) kann man durch unmittelbare Schlussfolgerung die allgemeinen Gesetze der

Deformation des Pfeilers, in Folge der Beanspruchung [Q], und des Systemes der inneren Kräfte ableiten, welche bei besagter Deformation zur Herstellung des inneren Gleichgewichtes auftreten.

Deformation.

Wir haben schon bemerkt (§. 17), wie in Folge der Beanspruchung [Q] die beiden Knotenpunkte m' sich nähern, indem sie höher steigen, und die beiden Knotenpunkte m'' sich entfernen, indem sie tiefer kommen, und zwar um dasselbe Mass; dagegen sind alle vier gleichen horizontalen Verschiebungen im positiven Sinne von [Q] unterworfen. (Fig. 18.)

Dasselbe Gesetz gilt offenbar für irgendwelche vier Punkte der Säulen, die ursprünglich in derselben horizontalen Ebene gelegen sind, ob man die Säulen als gelenkig an den Knotenpunkten oder als continuirliche, elastische Körper betrachtet.

Unter der zweiten Annahme bilden die deformirten Achsen der Säulen stetige Curven und aus dem Vorstehenden kann man leicht das Gesetz für die Biegung der vier Säulen durch [Q] ableiten, ein Gesetz, welches durch die Projectionen der deformirten Säulenachsen auf die Ebenen $\overline{\xi\zeta}$, $\overline{\xi\eta}$, $\overline{\zeta\eta}$ bestimmt ist.

1. Projection auf die Ebene $\overline{\xi\zeta}$. (Fig. 17.)

Die Projectionen der deformirten Achsen auf die Horizontalebene $\overline{\xi\zeta}$ sind Curven von derselben Ordnung wie jene der Verschiebungen, und ergeben sich paarweise gleich und symmetrisch oder gleich und congruent:

a) Die Paare $\Omega'\Omega'$ und $\Omega''\Omega''$ sind gleich, symmetrisch und symmetrisch gelegen;

b) die Paare $\Omega'\Omega''$, welche auf denselben Seitenflächen liegen, sind gleich, symmetrisch, aber nicht symmetrisch gelegen;

c) die Paare $\Omega'\Omega''$, welche diagonal liegen, sind gleich, congruent und gleich liegend.

2. Projection auf die Ebene $\overline{\xi\eta}$. (Fig. 16.)

In der Ebene $\overline{\xi\eta}$, parallel zur Inanspruchnahme, fallen die Projectionen der Paare $\Omega'\Omega'$, $\Omega''\Omega''$ in zwei Curven zusammen, von demselben Gesetze wie jenes der beiden Säulenachsen eines einfachen Pfeilers, welcher durch [Q] deformirt wird, d. h. man kann die beiden Curven

als gleich und congruent annehmen, wenn man den Einfluss der verticalen Verschiebungen vernachlässigt[1]).

3. Projection auf die Ebene $\overline{\xi\eta}$. (Fig. 15.)

In dieser Ebene, senkrecht auf die Inanspruchnahme:

a) sind die Paare $\Omega'\Omega'$ und $\Omega''\Omega''$ gleich, symmetrisch und symmetrisch gelegen;

b) die Paare $\Omega'\Omega''$, welche auf derselben Seitenfläche liegen, sind gleich, symmetrisch und symmetrisch gelegen;

c) die Paare $\Omega'\Omega''$, welche diagonal stehen, sind congruent, gleich und gleich liegend.

Das Gesetz für die doppelt gekrümmten Curven, nach welchen sich die Säulenachsen deformiren, ergibt sich folgendermassen:

α) Die deformirten Achsen der Paare $\Omega'\Omega'$ und $\Omega''\Omega''$ ergeben sich gleich, symmetrisch und symmetrisch gelegen;

β) die deformirten Achsen des Paares $\Omega'\Omega''$, welche auf einer Seitenfläche liegen, ergeben sich gleich und symmetrisch, aber antisymmetrisch gelegen;

γ) die deformirten Achsen des Paares $\Omega'\Omega''$, welche diagonal liegen, ergeben sich gleich, congruent und gleich gelegen, d. h. man kann sie durch parallele Verschiebung zur Deckung bringen.

In bestimmterer Form kann man die Deformatio nfolgend beschreiben:

Die beiden Achsen $\Omega'\Omega'$ befinden sich auf einer Cylinderfläche und kehren ihre convexe Seite in symmetrischer Weise gegen einander.

Die beiden Achsen $\Omega''\Omega''$ liegen gleichfalls auf einer Cylinderfläche, parallel zur vorhergehenden, kehren aber ihre concave Seite gegen einander.

Die beiden diagonal liegenden Achsen $\Omega'\Omega''$ (selbe sind congruent und gleich gelegen) befinden sich ebenfalls auf einer Cylinderfläche, welche zu Erzeugenden eine Reihe von Diagonalstangen hat; wir können daher in zusammenfassender Weise sagen:

---

[1]) Erinnern wir uns der in der Anmerkung des §. 9 gemachten Bemerkungen, welche auch für analoge Fälle, die sich im Laufe dieser Untersuchung ergeben werden, anwendbar sind.

Der parallelepipedische Körper, welcher durch die vier Säulen des Pfeilers bestimmt ist, erleidet durch die Inanspruchnahme [Q] eine von vier Cylinderflächen mit horizontalen Erzeugenden bestimmte Deformation:

α) Zwei davon, mit parabolischen Leitcurven, unter einander parallel und senkrecht auf die Beanspruchung [Q] sind die deformirten Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$, $\overline{\Omega''\Omega''}$.

β) Zwei, welche sich schneiden und in Bezug auf die Beanspruchung symmetrisch liegen, sind die deformirten Diagonalebenen $\overline{\Omega'\Omega''}$. Die beiden Reihen der Diagonalstangen sind die Erzeugenden und ihre Schnittcurve (der geometrische Ort der Schnittpunkte der Diagonalstangen nach der Deformation) bildet die deformirte Achse des Parallelepipedes; dieselbe ist offenbar eine ebene Curve, welche in der Symmetrie-Ebene des deformirten Systemes liegt.

Die zur Ebene der Beanspruchung parallelen Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega''}$ deformiren sich nach Regelflächen, deren jede als Leitlinien zwei Curven von doppelter Krümmung hat, die gleich und symmetrisch sind, aber antisymmetrisch liegen. Die Horizontalstangen bilden die geradlinigen Erzeugenden und die Mittelpunkte derselben liegen auf ebenen, mit den Projectionen der deformirten Säulenachsen auf die Symmetrie-Ebene (Ebene $\overline{\xi\eta}$) congruenten Curven.

Die geometrischen Orte der Mittelpunkte der horizontalen Stangen der vier Seitenflächen sind daher vier ebene, congruente und äquidistante Curven.

Diese sind aber nicht congruent und äquidistant mit der deformirten Pfeilerachse (geometrischer Ort der Schnittpunkte der Diagonalstangen), wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die gegenseitige Verrückung der Diagonalstangen in Folge der Annäherung der Knotenpunkte m' und der Entfernung der Knotenpunkte m'' beachtet. (Fig. 18.) Fig. 19 gibt eine perspectivische Ansicht des von der Beanspruchung [Q] deformirten Pfeilers.

Innere Kräfte.

Das Gesetz des Systemes der inneren Kräfte, welche durch [Q] hervorgebracht werden, leitet sich leicht aus dem Folgesatze des

Fundamental-Lehrsatzes ab und kann in Folgendem zusammengefasst werden:

1. Die Inanspruchnahmen der homologen Glieder:

$$(') \qquad [\Omega'_m], \quad [\omega'_m], \quad [\omega'_m]^*, \quad [\varrho'_m]^*,$$
$$('') \qquad [\Omega''_m], \quad [\omega''_m], \quad [\omega''_m]^*, \quad [\varrho''_m]^*$$

sind gleich und von entgegengesetztem Zeichen; es ist leicht einzusehen, dass im positiven Sinne von [Q] die Glieder der Serie (') auf Zug und die Glieder der Serie ('') auf Druck beansprucht sind.

2. Die inneren Kräfte in den horizontalen Stangen der Seitenflächen, welche parallel zur Beanspruchung sind, und jene der inneren Diagonalen:

$$[\varrho_m], \quad [\sigma_m]$$

sind Null.

Die inneren Kräfte der Glieder, welche auf den zur Beanspruchung parallelen Seitenflächen $\overline{\Omega' \Omega''}$ liegen, folgen demselben Gesetze, wie die Glieder eines einfachen Pfeilers, welcher auf „Umstürzen" beansprucht wird.

Die inneren Kräfte der Glieder, welche sich auf der Seitenfläche $\overline{\Omega'' \Omega''}$ befinden, folgen demselben Gesetze, wie jene der Glieder eines einfachen Pfeilers, der auf „Zerknicken" beansprucht wird.

Die inneren Kräfte der Glieder, welche auf der Seitenfläche $\overline{\Omega' \Omega'}$ liegen, folgen einem analogen Gesetze mit entgegengesetzten Zeichen, d. h. einem solchen, wie es für die Beanspruchung der Glieder eines einfachen, auf „Zerreissen" beanspruchten Pfeilers gilt.

Die in der folgenden Untersuchung entwickelten Formeln werden diese Analogie deutlich zeigen.

Fig. 20 gibt eine übersichtliche Darstellung dieser Systeme von inneren Kräften.

In der folgenden Abhandlung ist die Aufgabe, wie bei dem einfachen Pfeiler, mit zweifacher Bestimmung der Componenten gelöst; diese Componenten der Verschiebungen und Beanspruchungen durch [Q] werden wir auf Grund des Fundamental-Lehrsatzes und Folgesatzes mit

Berücksichtigung der Bezeichnungen (32) als halbe Differenzen der homologen Verschiebungen und Beanspruchungen in die Rechnung einführen.

§. 24. Gleichgewichts-Gleichungen.

Wenn wir uns den Pfeiler unmittelbar über den m^{ten} Knotenpunkten durch eine Horizontal-Ebene geschnitten denken, so resultirt als Gleichgewichts-Bedingung für den oberen Theil in Bezug auf Drehung um die Gerade $\overline{BB}$, welche die Schnittpunkte der m^{ten} geneigten Stangen auf den Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega''}$ verbindet:

$$\left([\Omega''_m] - [\Omega'_m] + ([\omega''_m]^* - [\omega'_m]^*) \cos\gamma^*\right) \frac{b}{2} = M +$$

$$+ 2Q\left(m - \frac{1}{2}\right)a + qm(m-1)a^2 - \mu'_m + \mu''_m + (\tau'_m - \tau''_m) \cdot \frac{a}{2}$$

und als Bedingung für das horizontale Gleichgewicht:

$$([\omega''_m] - [\omega'_m]) \sin\gamma = 2(Q + qma) - \tau'_m + \tau''_m.$$

Eliminirt man τ'_m und τ''_m mittelst:

$$\tau'_m = \frac{-\mu'_{m-1} + \mu'_m}{a} + \frac{1}{2}qa \qquad \tau''_m = \frac{-\mu''_{m-1} + \mu''_m}{a} - \frac{1}{2}qa$$

so reduciren sich die vorstehenden Gleichungen mit Berücksichtigung von (32) auf die Form:

$$[\Omega_m]_q + [\omega_m]_q^* \cos\gamma^* = \frac{\mathfrak{M}_m}{b} \tag{50}$$

$$[\omega_m]_q \cos\gamma = \frac{\mathfrak{N}_m}{b} \tag{51}$$

und mit den mit (20) identischen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}_m &= M_m - \mu_{m-1q} - \mu_{mq} \\
M_m &= M + Q\left(m - \frac{1}{2}\right)a + q\left(m(m-1) + \frac{1}{2}\right)a^2 \\
\mathfrak{N}_m &= Q_m a + \mu_{m-1q} - \mu_{mq} \\
Q_m &= Q + q\left(m - \frac{1}{2}\right)a.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Transformirt man (50) und (51) mittelst (31), indem man (32), (33) berücksichtigt und den Zeiger m von 1 bis n variiren lässt, so erhält man die beiden Systeme:

$$\eta_{0q} - \eta_{1q} = \frac{a}{O + o^*} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{b} + \frac{b^* w^*}{a} \zeta_{1q}$$

. . . .

(53) $$\eta_{m-1q} - \eta_{mq} = \frac{a}{O + o^*} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{b} + \frac{b^* w^*}{a} (\zeta_{m-1q} + \zeta_{mq})$$

. . . .

$$\eta_{n-1q} = \frac{a}{O + o^*} \cdot \frac{\mathfrak{M}_n}{b} + \frac{b^* w^*}{a} \zeta_{u-1q}$$

$$\xi_{0q} - \xi_{1q} = \left(\frac{a}{o} \cdot \frac{\mathfrak{N}_1}{b} + \eta_{0q} + \eta_{1q} \right) \cot \gamma$$

. . . .

(54) $$\xi_{m-1q} - \xi_{mq} = \left(\frac{a}{o} \cdot \frac{\mathfrak{N}_m}{b} + \eta_{m-1q} + \eta_{mq} \right) \cot \gamma$$

. . . .

$$\xi_{n-1q} = \left(\frac{a}{o} \cdot \frac{\mathfrak{N}_n}{b} + \eta_{n-1q} \right) \cot \gamma.$$

(51) und (54) sind identisch mit (19) und (22).

Subtrahirt man die mittelst (31) transformirten Gleichungen (36):

$$Z_{mq} = \frac{b^* o^*}{a^2} (\eta_{m-1q} - \eta_{m+1q}) -$$
$$- \frac{b^{*2}}{a^3} [o^* \zeta_{m-1q} + 2 (o^* + r^*) \zeta_{mq} + o^* \zeta_{m+1q}]$$

und eliminirt man daraus die η_q mittelst einer Gleichung, die man durch Summirung der m^{ten} und $m + 1^{ten}$ Gleichung des Systemes (53) erhält, so ergibt sich nach durchgeführter Reducirung:

(55) $$Z_{mq} = \frac{b^* w^*}{a} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_{m+1}}{b} -$$
$$- \frac{b^{*2}}{a^3} [u^* \zeta_{m-1q} + 2 (u^* + r^*) \zeta_{mq} + u^* \zeta_{m+1q}]$$

eine mit (7) vollkommen analoge Gleichung. Die (50) (51) (53) (54) und (55) bilden die Fundamental-Formeln zur Lösung der Aufgabe.

§. 25. Lösung der Aufgabe, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet.

Unter dieser Annahme hat man:

$$\mathfrak{M}_m = M_m, \quad \mathfrak{N}_m = Q_m a, \quad Z_{mq} = 0$$

und die Bestimmung von ζ_q η_q ξ_q macht man successive in folgender Weise.

(55) von 1 bis $n-1$ angewendet, bildet das System zur Bestimmung der ζ_q:

$$
\begin{aligned}
&2(\mathfrak{u}^* + \mathfrak{r}^*)\,\zeta_{1q} + \mathfrak{u}^*\zeta_{2q} &&= \mathfrak{w}^*\,\frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^*}\cdot\frac{M_1+M_2}{\mathfrak{b}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(56)\quad &\mathfrak{u}^*\zeta_{m-1q} + 2(\mathfrak{u}^* + \mathfrak{r}^*)\,\zeta_{mq} + \mathfrak{u}^*\zeta_{m+1q} &&= \mathfrak{w}^*\,\frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^*}\cdot\frac{M_m+M_{m+1}}{\mathfrak{b}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathfrak{u}^*\zeta_{n-2q} + 2(\mathfrak{u}^* + \mathfrak{r}^*)\,\zeta_{n-1q} &&= \mathfrak{w}^*\,\frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^*}\cdot\frac{M_{n-1}+M_n}{\mathfrak{b}}
\end{aligned}
$$

Dieses System ergibt die ζ_q, (53) durch successive Summirung die η_q und daher (54) die ξ_q.

Die in dieser Untersuchung inbegriffene Aufgabe der Beanspruchung auf Zerknicken (für die Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$, $\overline{\Omega''\Omega''}$) ergibt sich offenbar aus dem Systeme (56) ganz analog mit dem Systeme (8).

Aus (50) und (51) erhält man:

$$
(57)\qquad
\begin{aligned}
[\Omega_m]_q + [\omega_m]_q^* \cos\gamma^* &= \frac{M_m}{\mathfrak{b}}\\
[\omega_m]_q &= \frac{Q_m}{\sin\gamma}.
\end{aligned}
$$

Die Vertheilung der Beanspruchung $\frac{M_m}{\mathfrak{b}}$ zwischen die Glieder $[\Omega_m]$ und $[\omega_m]^*$, durch die Deformation des Systemes bestimmt, ist aber eine der expliciten, angenäherten Lösung vorbehaltene Aufgabe.

§. 26. Erste explicite, angenäherte Lösung (gelenkiges System).

Diese Lösung ergibt sich aus einem Ausdrucke für ζ_{mq}, analog mit (14), welcher in strenger Weise[1]) den Zwischengleichungen, aber nicht den beiden Endgleichungen des Systemes (56) genügt.

Setzt man, analog mit (13):

---

[1]) Einen sehr kleinen Fehler bezüglich eines Bruchtheiles von q ausgenommen.

$$(58)\qquad \psi^* = \frac{w^*}{2u^* + r} = \frac{o^*}{Or^* + 2Oo^* + o^*r^*}$$

so resultirt der Ausdruck:

$$(59)\qquad \zeta_{mq} = \psi^* \frac{a^2}{b^*} \cdot \frac{M + 2Qma + qm^2a^2}{b}.$$

In Bezug auf die Annäherung und den Charakter der Lösung aus (59) gelten auch für diesen Fall die in §. 7 gemachten Bemerkungen.

Mittelst (59) nimmt nach durchgeführter Reducirung das System (53) die allgemeine Form an:

$$(53')\qquad \eta_{m-1q} - \eta_{mq} = (1 - \psi^* r^*) \frac{a}{O} \cdot \frac{M_m}{b}.$$

eine mit (16) analoge Gleichung, aus welcher man gleiche Schlussfolgerungen bezüglich des Zerknickungs-Widerstand-Querschnittes des Pfeilers, welchen die Seitenflächen $\overline{\Omega''\Omega''}$ und $\overline{\Omega'\Omega'}$ bilden, ziehen kann.

Mittelst (59) und (53′) erhält man aus (31) mit Berücksichtigung von (32) die expliciten Ausdrücke der Beanspruchungen:

$$(60)\qquad \begin{aligned} [\Omega_m]_q &= (1 - \psi^* r^*) \frac{M_m}{b} \\ [\omega_m]_q^* &= \psi^* r^* \frac{M_m}{b \cos \gamma^*} \\ [\varrho_m]_q^* &= \psi^* r^* \frac{M_m + M_{m+1}}{b \cot \gamma^*}, \end{aligned}$$

ferner für die übrigen Glieder:

$$[\omega_m]_q = \frac{Q_m}{\sin \gamma} \text{ und } [\varrho_m]_q = [\sigma_m]_q = 0,$$

Man beachte die vollkommene Analogie von (60) mit (17).

§. 27. Die Continuität der Säulen und ihre Befestigung an den Enden berücksichtigt.

In diesem Falle vereinigt sich die Aufgabe der Bestimmung von ζ_q mit jener der Bestimmung von μ_q und beide können gleichzeitig gelöst werden, wenn man die Systeme (M) und (O) (Einleitung IV) bezüglich des continuirlichen, auf verschieden hohen Stützen ruhenden und an den Enden eingespannten Trägers auf das Studium der Biegung der Säulenachsen anwendet.

Die doppelte Untersuchung, welche wir jetzt anstellen werden, ist analog mit jenen des §. 6 und §. 12 für den einfachen Pfeiler.

A. Biegung in der Ebene $\overline{\xi\eta}$.

Wenn wir das System (M) auf das Studium der Biegung der auf die Ebene $\overline{\xi\eta}$ projicirten Säulenachsen anwenden mit den Transformationen der Zeichen, wie in den Systemen (9) und (41) angegeben, und die beiden so erhaltenen Systeme subtrahiren, geben selbe offenbar ein mit (24) vollkommen identisches System, welches wir in derselben Form schreiben werden:

$$\frac{2a}{b}\eta_{0q} - \xi_{0q} + \xi_{1q} = \frac{a^2}{6Oi^2}\left(2\mu_{0q} + \mu_{1q} - \frac{1}{4}qa^2\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(61)\quad \xi_{m-1q} - 2\xi_{mq} + \xi_{m+1q} = \frac{a^2}{6Oi^2}\left(\mu_{m-1q} + 4\mu_{mq} + \mu_{m+1q} - \frac{1}{2}qa^2\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_{n-1q} = \frac{a^2}{6Oi^2}\left(\mu_{n-1q} + 2\mu_{nq} - \frac{1}{4}qa^2\right)$$

Auf gleiche Weise erhält man aus dem mit (22) identischen Systeme (54) durch dieselben Transformationen, wie im §. 12 angegeben, ein mit (22′) identisches System:

$$\frac{2a}{b}\eta_{0q} - \xi_{0q} + \xi_{1q} =$$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{a}{ob}\left(- \mu_{0q} + \mu_{1q} - Q_1 a\right) + \eta_{0q} - \eta_{1q}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(54')\quad \xi_{m-1q} - 2\xi_{mq} + \xi_{m+1q} =$$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{a}{ob}\left(\mu_{m-1q} - 2\mu_{mq} + \mu_{m+1q} - qa^2\right) + \eta_{m-1q} - \eta_{m+1q}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_{n-1q} = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{ob}\left(\mu_{n-1q} - \mu_{nq} + Q_n a\right) + \eta_{n-1q}\right)$$

Eliminirt man jetzt die Ausdrücke aus den ersten Gliedern mittelst des Systemes (61) und die Ausdrücke mit η_q mittelst des Systemes (53) aus den zweiten Gliedern auf dieselbe Weise, wie analog im §. 12

angegeben wurde, so erhält man ein System, welches mit Berücksichtigung von (52) als einzige Unbekannte μ_q und ζ_q enthält. Multiplicirt man mit $O\frac{b^2}{a^2}$ und setzt:

$$(62)\qquad \begin{aligned} F_1 &= \frac{b^2}{6i^2} - \frac{O}{o} + \frac{O}{O+o^*} \\ F_2 &= \frac{b^2}{3i^2} + \frac{O}{o} + \frac{O}{O+o^*} \end{aligned}$$

so ergibt sich dieses System wie folgt:

$$F_2\,\mu_{0q} + F_1\,\mu_{1q} = \frac{O}{O+o^*}M_1 - \frac{O}{o}Q_1 a + \\ + q a^2\frac{b^2}{24i^2} + \frac{b\,b^*}{a^2}u^*\zeta_{1q}$$

. . . .

$$(63)\qquad F_1\,\mu_{m-1q} + 2F_2\,\mu_{mq} + F_1\,\mu_{m+1q} = \frac{O}{O+o^*}(M_m + M_{m+1}) + \\ + q a^2\left(\frac{b^2}{12i^2} - \frac{O}{o}\right) + \frac{b\,b^*}{a^2}u^*(\zeta_{m-1q} + 2\zeta_{mq} + \zeta_{m+1q})$$

. . . .

$$F_1\,\mu_{n-1q} + F_2\,\mu_{nq} = \frac{O}{O+o^*}M_n + \frac{O}{o}Q_n a + \\ + q a^2\frac{b^2}{24i^2} + \frac{b\,b^*}{a^2}u^*\zeta_{n-1q}.$$

B. Biegung in der Ebene $\overline{\zeta\eta}$.

Wenn man das System (o) auf das Studium der Biegung der auf die Ebene $\overline{\zeta\eta}$ projicirten Säulenachsen Ω' und Ω'' verwendet, mit den im Systeme (42) angewendeten Transformationen der Zeichen und die beiden so erhaltenen Systeme von Gleichungen subtrahirt, ergibt sich:

$$7Z_{1q} + 2Z_{2q} = \frac{6Oi^{*2}}{a^3}(18\zeta_{1q} - 9\zeta_{2q} + 2\zeta_{3q}$$

. . . .

$$(64)\qquad Z_{m-1q} + 4Z_{mq} + Z_{m+1q} = \frac{6Oi^{*2}}{a^3}(\zeta_{m-2q} - 4\zeta_{m-1q} + 6\zeta_{mq} - \\ - 4\zeta_{m+1q} + \zeta_{m+2q}]$$

. . . .

$$2Z_{n-2q} + 7Z_{n-1q} = \frac{6Oi^{*2}}{a^3}(2\zeta_{n-3q} - 9\zeta_{n-2q} + 18\zeta_{n-1q})$$

Substituirt man in (64) die Z_q mittelst (55), so erhält man ein System zwischen den ζ_q und μ_q von der Form:

$$(2a_1^* - a_2^* + 2a_3^*)\zeta_{1q} + (2a_2^* - a_1^*)\zeta_{2q} + 2a_1^*\zeta_{3q} =$$
$$= w^* a^2 b^* \frac{7\mathfrak{M}_1 + 9\mathfrak{M}_2 + 2\mathfrak{M}_3}{b}$$

. . . .

$$(65)\quad a_1^*\zeta_{m-2q} + a_2^*\zeta_{m-1q} + a_3^*\zeta_{mq} + a_2^*\zeta_{m+1q} + a_1^*\zeta_{m+2q} =$$
$$= w^* a^2 b^* \frac{\mathfrak{M}_{m-1} + 5(\mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+2}}{b}$$

. . . .

$$2a_1^*\zeta_{n-3q} + (2a_2^* - a_1^*)\zeta_{n-2q} + (2a_1^* - a_2^* + 2a_3^*)\zeta_{n-1q} =$$
$$= w^* a^2 b^* \frac{2\mathfrak{M}_{n-3} + 9\mathfrak{M}_{n-2} + 7\mathfrak{M}_{n-1}}{b}$$

in welchem die $\mathfrak{M}$ aus (52) substituirt werden können. Dieses System ist vollkommen analog mit dem Systeme (10) und seine Coëfficienten sind, die Sterne ausgenommen, mit den aus (11) bestimmten Coëfficienten vollkommen gleich, nämlich:

$$a_1^* = u^* b^{*2} + 6 O i^{*2}$$
$$a_2^* = (6u^* + 2r^*) b^{*2} - 24 O i^{*2}$$
$$a_3^* = (10u^* + 8r^*) b^{*2} + 36 O i^{*2}$$

Bestimmt man die μ_q und ζ_q, indem man die Systeme (63) und (65) zusammen auflöst, so ergeben die (53) und (54) die η_q und ξ_q.

Ferner kann man, bei bekannten ζ_q, aus der Formel (N), wenn man selbe in geeigneter Weise transformirt und die Zeichen modificirt, die μ_q^* bestimmen; wir werden der Kürze halber die bezüglichen, mit (12) ganz analogen Formeln nicht aufschreiben.

§. 28. Zweite explicite, angenäherte Lösung (mit Berücksichtigung der Continuität etc.).

Die strenge Bestimmung von μ_q und ζ_q mittelst der beiden Systeme (63) und (65) ist in keinem Falle praktisch durchführbar. Die Aufgabe lässt sich aber in angenäherter Weise, ziemlich elegant, durch die beiden expliciten Ausdrücke von μ_q und ζ_q lösen, welche den allgemeinen Gleichungen von (63) und (65) genügen. Ausdrücke, die wir durch den folgenden Vorgang einer successiven Annäherung bestimmen können.

Vor Allem beachten wir, dass die Ausdrücke mit ζ_q in den zweiten Gliedern von (63) und jene mit μ_q, in den $\mathfrak{M}$ enthalten, der zweiten Glieder von (65), wenn man sie als bestimmt betrachtet, nur sehr geringe Grössen im Verhältnisse zu den übrigbleibenden, bekannten Ausdrücken der beiden Systeme von Gleichungen darstellen würden[1]).

Vernachlässigen wir dieselben in erster Annäherung, so können wir die expliciten Werthe von μ_q und ζ_q, welche den so vereinfachten allgemeinen Gleichungen (63) und (65) genügen, bestimmen.

Die Substituirung dieser Werthe für die vernachlässigten Ausdrücke in den zweiten Gliedern gibt uns strengere Gleichungen, welche wieder der expliciten Lösung unterworfen werden können; dieses Verfahren fortgesetzt, gibt uns eine Serie von Gleichungen, welche der expliciten Lösung unterworfen werden können, und eine Reihe von immer mehr angenäherten Werthen für μ_q und ζ_q, von solcher Form, dass wir die Grenze, nach welcher dieselben streben, bestimmen können.

Wir werden in der Untersuchung die q vernachlässigen, ein Element der Beanspruchung, für welches die expliciten Lösungsmethoden, wie wir schon bemerkten, einen kleinen Fehler ergeben.

---

[1]) Die Anwesenheit der ζ_q in (63) und der μ_q in (65) zeigt den gegenseitigen Einfluss der Biegungen der Säulen in der Ebene $\overline{\zeta\eta}$ (bestimmt durch die Verschiebungen ζ_q) und jenen der Biegungen in der Ebene $\overline{\xi\eta}$ (bestimmt von den Momenten μ_q). — Setzen wir die ζ_q gleich Null voraus, d. h. verhindern wir die erste Biegung, so vermindern sich die aus (63) gegebenen Werthe, was auch klar ist, wenn man die grössere Beanspruchung bedenkt, welche in den zur Inanspruchnahme senkrechten, gekreuzten Stangen des Gitterwerkes hervorgebracht wird, weshalb die seitliche Biegung des Pfeilers verringert wird. — Setzt man dagegen die μ_q im Systeme (65) gleich Null voraus, so vergrössern sich die Werthe von ζ_q, was auch wieder klar ist, weil diese Annahme mit der Voraussetzung äquivalent ist, dass die Säulen in den Knotenpunkten gelenkig sind, was ihren Widerstand auf Biegung in der Ebene $\overline{\xi\eta}$ gleich Null macht, deshalb wird die ganze Inanspruchnahme auf Umstürzen durch den Widerstand auf Zerknicken und Zerreissen des aus den Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$ und $\overline{\Omega''\Omega''}$, welche auf die Inanspruchnahme senkrecht stehen, bestehenden einfachen Pfeiler aufgehoben.

Diese Bemerkungen zeigen den Grad von Annäherung, welchen man erreicht, wenn man die beiden Systeme (63) und (65) anwendet, nachdem man selbe vereinfacht hat, indem man in den zweiten Gliedern des ersten $\zeta_q = 0$ und in jenen des zweiten $\mu_q = 0$ setzt. Kurz zusammengefasst:

a) Für das Studium der Biegung der Säulen in der Ebene $\overline{\xi\eta}$ setzt man dieselben als in der Ebene $\overline{\zeta\eta}$ nicht deformirbar voraus,

b) und für das Studium der Biegung in der Ebene $\overline{\zeta\eta}$ setzt man dieselben als in der Ebene $\overline{\xi\eta}$ gelenkig voraus.

Nehmen wir also (59) als ersten angenäherten Ausdruck für die ζ_q an (ein Ausdruck, welcher [65] genügt, wenn man $\mu_q = 0$ setzt) und eliminiren wir mit demselben diese Unbekannten aus (63), so erhält man nach durchgeführter Reducirung:

$$(63)_{(1)} \quad F_1 \mu_{m-q} + \ldots\ldots \text{ etc.} = 2\,(1 - \psi^* r^*)\,(M + 2\,Q\,m\,a).$$

Zur Aufsuchung eines Ausdruckes für μ_{mq}, welcher dieser Gleichung entspricht, schlagen wir denselben Weg ein, wie im §. 13, indem wir jenen von der folgenden Form annehmen:

$$(66) \qquad \mu_{mq} = \frac{I}{J}\,(2M + 4\,Q\,m\,a).$$

Durch Substituirung in $(63)_{(1)}$ zur Bestimmung des ersten angenäherten Werthes vom Trägheits-Momente J erhält man:

$$(67)_{(1)} \qquad J_{(1)} = \frac{2\,\Omega}{1 - \psi^* r^*}\left(\frac{b^2}{2} + 2\,\frac{O}{O + o^*}\,i^2\right).$$

Die Substituirung von (66) in das zweite Glied der allgemeinen Gleichung (65) gibt uns daher:

$$(65)_{(1)} \quad a_1^* \zeta_{m-2q} + \ldots\ldots \text{ etc.} = 12\,w^* a^2 b^* \left(1 - \frac{4I}{J_{(1)}}\right)\frac{M + 2\,Q\,m\,a}{b},$$

eine Gleichung, welcher genügt wird durch:

$$(59)_{(1)} \qquad \zeta_{mq} = \psi^* \frac{a^2}{b}\left(1 - \frac{4I}{J_{(1)}}\right)\frac{M + 2\,Q\,m\,a}{b}.$$

Mit diesem Werthe wird (63) nach Reducirung:

$$(63)_{(2)} \quad F_1 \mu_{m-1q} + \ldots\ldots \text{ etc.} = 2\left(1 - \psi^*\left[r^* + \frac{8I}{J_{(1)}}\,u^*\right]\right)(M + 2\,Q\,m\,a)$$

und mittelst (66) kann man den noch mehr angenäherten Werth von J bestimmen:

$$(67)_{(2)} \quad J_{(2)} = \frac{2\,\Omega}{1 - \psi^*\left(r^* + \frac{8I}{J_{(1)}}\,u^*\right)} \cdot \left(\frac{b^2}{2} + 2\,\frac{O}{O + o^*}\,i^2\right).$$

Somit ist das Bildungsgesetz für diese aufeinander folgenden Werthe von J klar, ein Gesetz, welches man zum Ausdrucke bringen kann, indem man statt $J_{(1)}$ und $J_{(2)}$, $J_{(n-1)}$ und $J_{(n)}$ setzt.

Substituirt man $J_{(1)}$ in $J_{(2)} \ldots\ldots J_{(n-1)}$ in $J_{(n)}$, so kann man beweisen, dass der Divisor von 2Ω in dem Werthe für $J_{(n)}$, wenn man der Kürze halber:

$$A = \frac{8\,u^*\,i^2}{b^2 + 4\,(1 - w^*)\,i^2}$$

setzt, resultirt:

$$1 - \psi^* \left(r^* + A\left[1 - \psi^*\,(r^* + A\,[1 - \ldots\ldots.])\right]\right)$$

diesen Ausdruck kann man als convergirende Reihe:

$$(1 - \psi^*\,r^*)\;(1 - \psi^*\,A)\;(1 + [\psi^*\,A]^2 + [\psi^*\,A)^4 + \ldots\ldots)$$

darstellen, mit dem Grenzwerthe:

$$\frac{1 - \psi^*\,r^*}{1 + \psi^*\,A}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck an Stelle des Divisors von 2Ω, so erhält man als Grenzwerth für $J_{(n)}$:

$$J = \lim J_{(n)} = \frac{2\Omega}{1 - \psi^*\,r^*} \cdot \frac{b^2}{2} + 4\,\Omega\,i^2. \tag{67}$$

Die beiden Glieder, in welche sich der Ausdruck für das Trägheits-Moment theilt, geben die beiden Elemente des Widerstandes des Pfeilers gegen seitliche Biegung, und zwar:

1. Der Widerstand gegen Zerknicken und Zerreissen der einfachen Pfeiler $\overline{\Omega'\Omega'}$, $\overline{\Omega''\Omega''}$ (auf die Ebene der Inanspruchnahme senkrechte Seitenflächen) ist dargestellt durch:

$$\frac{2\Omega}{1 - \psi^*\,r^*} \cdot \frac{b^2}{2}.$$

2. Der Widerstand der Säulen gegen Biegung in der Ebene $\overline{\xi\eta}$ ist dargestellt durch: $4\,\Omega\,i^2$.

Mit dieser Betrachtung des Widerstandes des Pfeilers gegen Biegung kann man auch die Formel (67) direct aufstellen.

Wenn wir den Ausdruck (67) für J annehmen, wird (66):

$$\mu_{mq} = \frac{2\,(1 - \psi^*\,r^*)\,i^2}{b^2 + 4\,(1 - \psi^*\,r^*)\,i^2}\,(M + 2\,Q\,m\,a). \tag{66'}$$

Eliminirt man mittelst (66') die μ_q aus (52) und setzt der Kürze halber:

(68) $$\Phi = \frac{b^2}{b^2 + 4(1 - \psi^* r^*) i^2},$$

so erhält man leicht:

(52′) $$\begin{aligned} \mathfrak{M}_m &= \Phi M_m \\ \mathfrak{N}_m &= \Phi Q_m a. \end{aligned}$$

Aus (50), (51), (53), (54), (65) kann man mittelst (52′) ableiten, dass es bei Annahme der Continuität der Säulen genügt, die Verschiebungen und Beanspruchungen, welche man für den als gelenkiges System betrachteten Pfeiler erhält, mit dem Corrections-Coëfficienten Φ zu multipliciren. Man hat daher:

(69) $$\begin{aligned} [\Omega_m]_q &= (1 - \psi^* r^*) \frac{\Phi M_m}{b} \\ [\omega_m]_q &= \frac{\Phi Q_m}{\sin \gamma} \\ [\omega_m]_q^* &= \psi^* r^* \frac{\Phi M_m}{b \cos \gamma^*} \\ [\varrho_m]_q^* &= \psi^* r^* \frac{\Phi (M_m + M_{m+1})}{b \cot \gamma^*}, \end{aligned}$$

wo wir noch der Vollständigkeit halber hinzufügen:

$$[\varrho_m]_q = [\sigma_m]_q = 0.$$

§. 29. Tabelle der totalen inneren Beanspruchungen in Folge der beiden Inanspruchnahmen [P] und [Q].

Schliesslich ergeben die (32) mit (49) und (69) die Ausdrücke für die totale innere Beanspruchung eines jeden Gliedes des Pfeilers:

$$\left.\begin{matrix}[\Omega'_m] \\ [\Omega''_m]\end{matrix}\right\} = (1 - \Psi r - \Psi^* r^* - 2[\Psi + \Psi^*] s) P_m \mp (1 - \psi^* r^*) \frac{\Phi M_m}{b}$$

$$\left.\begin{matrix}[\omega'_m] \\ [\omega''_m]\end{matrix}\right\} = (\Psi\, r + [\Psi + \Psi^*] s) \frac{P_m}{\cos \gamma} \mp \frac{\Phi Q_m}{\sin \gamma}$$

$$\left.\begin{matrix}[\omega'_m]^* \\ [\omega''_m]^*\end{matrix}\right\} = (\Psi^* r^* + [\Psi + \Psi^*] s) \frac{P_m}{\cos \gamma^*} \mp \psi^* r^* \frac{\Phi M_m}{b \cos \gamma^*}$$

$$[\varrho_m] = \Psi r \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot \gamma}$$

$$\left.\begin{matrix}[\varrho'_m]^* \\ [\varrho''_m]^*\end{matrix}\right\} = \Psi^* r^* \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot \gamma^*} \mp \psi^* r^* \frac{\Phi (M_m + M_{m+1})}{b \cot \gamma^*}$$

$$[\sigma_m] = (\Psi + \Psi^*) s \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot \gamma \cos \delta} = (\Psi + \Psi^*) s \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot \gamma^* \sin \delta}.$$

Zur Completirung der allgemeinen Tabelle der Resultate für das Gleichgewicht des prismatischen Pfeilers fügen wir noch eine Tabelle der Coëfficienten hinzu, welche in den vorstehenden Ausdrücken für die totale innere Beanspruchung vorkommen:

$$\Psi = \frac{WH^* - W^*K}{HH^* - K^2} \qquad H = 2(U + V) + r + s$$

$$K = s - 2V$$

$$\Psi^* = \frac{W^*H - WK}{HH^* - K^2} \qquad H^* = 2(U^* + V) + r^* + s$$

$$\psi^* = \frac{o^*}{O r^* + 2 O o^* + o^* r^*}$$

$$\Phi = \frac{b^2}{b^2 + 4(1 - \psi^* r^*) i^2}$$

und erinnern uns an die Bedeutung der Buchstaben:

$4P_m$ = Verticale Componente .... für alle Kräfte, welche den
$4Q_m$ = Horizontale Componente .... Pfeiler oberhalb des m^{ten}
$2M_m$ = Moment bezüglich der Geraden $\overline{BB}$ Feldes beanspruchen.

Zweiter Theil.

Pfeiler mit convergirenden Säulen.

I. Abschnitt.

Der einfache Pfeiler.

I. Capitel.

Bezeichnungen und Fundamental-Formeln.

§. I. Bezeichnungen.

Das Studium des Gleichgewichtes für dieses System, dessen Schema (Fig. 21, Taf. V) aus zwei geradlinigen, symmetrisch geneigten Säulen besteht, die durch Gitterwerke in der Form eines Andreas-Kreuzes verbunden sind, kann durch Verallgemeinerung der Formeln, welche für den speciellen Fall eines einfachen Pfeilers mit verticalen Säulen aufgestellt wurden, durchgeführt werden.

Wir werden dieselben Bedingungen für die Inanspruchnahme des Pfeilers, wie sie schon öfter definirt wurden, beibehalten; aber wegen Vereinfachung der Rechnung werden wir für die gleichförmig vertheilte Horizontalkraft q, die in den Knotenpunkten concentrirten Kräfte q_m substituiren und das in den Säulen concentrirte totale Eigengewicht des m^{ten} Feldes mit $2p_m$ bezeichnen.

Die Höhe der Felder als ungleich vorausgesetzt, werden wir für die Querschnitte der Säulen, Stangen und für die Neigungswinkel in den verschiedenen Feldern ganz dieselben Bezeichnungen beibehalten, wie bei den Untersuchungen des einfachen Pfeilers mit verticalen Säulen, indem wir die geometrischen Elemente (Querschnitte, Winkel, Längen) für das m^{te} Feld mit dem Zeiger m unterscheiden.

Mit ξ und η werden wir die Verschiebungen der Knotenpunkte nach der horizontalen und verticalen Achse anzeigen, mit den bekannten Angaben bezüglich des Vorzeichens; die zu den Säulenachsen normalen Componenten der Beanspruchungen der in den Knotenpunkten m' und m'' zusammenlaufenden Stangen werden wir mit X'_m und X''_m, und schliesslich mit ε den Neigungswinkel der Säulenachsen bezeichnen.

Zwischen den Längen $\mathbf{a}_m$, $\mathbf{b}_m$ und den Winkeln γ_m, ε bestehen folgende Beziehungen:

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{a}_m (\text{tang}\, \gamma_m + \text{tang}\, \varepsilon) = \mathbf{a}_{m+1} (\text{tang}\, \gamma_{m+1} - \text{tang}\, \varepsilon)$$

$$(\text{I}) \quad \sin(\gamma_m - \varepsilon) = \frac{\mathbf{b}_{m-1}}{\mathbf{a}_m} \cos\gamma_m \cos\varepsilon \qquad \text{tang}\, \gamma_m = \frac{\mathbf{b}_m + \mathbf{b}_{m-1}}{2\mathbf{a}_m}$$

$$\sin(\gamma_m + \varepsilon) = \frac{\mathbf{b}_m}{\mathbf{a}_m} \cos\gamma_m \cos\varepsilon \qquad \text{tang}\, \varepsilon = \frac{\mathbf{b}_m - \mathbf{b}_{m-1}}{2\mathbf{a}_m}$$

Für die Beanspruchungen, dieselben in Functionen der Verschiebungen ausgedrückt und die gewöhnlichen Annahmen bezüglich der Zeichen beibehalten, resultiren die Gleichungen:

$$[\Omega'_m] = [(\xi'_{m-1} - \xi'_m) \sin\varepsilon + (\eta'_{m-1} - \eta'_m) \cos\varepsilon] \frac{E_1 \Omega_m}{\mathbf{a}_m} \cos\varepsilon$$

$$[\Omega''_m] = [(\xi''_{m-1} - \xi''_m) \sin\varepsilon + (\eta''_{m-1} - \eta''_m) \cos\varepsilon] \frac{E_1 \Omega_m}{\mathbf{a}_m} \cos\varepsilon$$

$$(\text{II}) \quad [\omega'_m] = [(\eta''_{m-1} - \eta'_m) \cos\gamma_m - (\xi''_{m-1} + \xi'_m) \sin\gamma_m] \frac{E \omega_m}{\mathbf{a}_m} \cos\gamma_m$$

$$[\omega''_m] = [(\eta'_{m-1} - \eta''_m) \cos\gamma_m - (\xi'_{m-1} + \xi''_m) \sin\gamma_m] \frac{E \omega_m}{\mathbf{a}_m} \cos\gamma_m$$

$$[\varrho_m] = (\xi'_m + \xi''_m) \frac{E \varrho_m}{\mathbf{b}_m}.$$

§. II. Fundamental-Lehrsatz.

Wenn wir die äussere Inanspruchnahme trennen in:

A. Inanspruchnahme auf Zerknicken [P], hervorgerufen durch die symmetrischen Vertical-Belastungen 2P und $2p_m$;

B. Inanspruchnahme auf Umstürzen [Q], hervorgebracht durch die Horizontalkräfte 2Q, $2q_m$ und das Moment M, so lässt sich für den Pfeiler mit geneigten Säulen der Fundamental-Lehrsatz und Folgesatz, welche im §. 2 für den Pfeiler mit verticalen Säulen gegeben

wurden, identisch erweitern, ebenso wie man auch daraus alle Gesetze und Eigenschaften der Deformation und des Systemes der inneren Kräfte ableiten kann, ausgenommen einige schon angedeutete kleine Modificationen wegen der Neigung der Säulen.

Die Wirkung jeder dieser Inanspruchnahme, für sich allein betrachtet, kann daher wie folgt definirt werden:

I. Die Inanspruchnahme [P] deformirt die Säulen nach gleichen, symmetrischen und symmetrisch liegenden Curven, wobei die Paare der geneigten Glieder in gleicher Weise auf Druck, die horizontalen Glieder dagegen auf Zug beansprucht werden. (Fig. 22.)

II. Die Inanspruchnahme [Q] deformirt die Säulen nach gleichen und congruenten[1]) (aber nicht gleich gelegenen) Curven, indem sie zwei correspondirende, geneigte Glieder desselben Feldes gleich und entgegengesetzt, die horizontalen Stangen dagegen gar nicht beansprucht. (Fig. 23.)

Wir unterlassen jede Bemerkung bezüglich des Lehrsatzes, nachdem die Untersuchung selbst dafür den Beweis liefert.

§. III. Bezeichnungen.

Wir werden die im §. 3 angegebenen Bezeichnungen (2), welche die halben Summen und Differenzen der homologen Verschiebungen, Beanspruchungen und Momente betreffen, in gleicher Weise auch hier anwenden, und unterlassen es, dieselben neuerdings aufzuschreiben, um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden.

Wir fügen als Verallgemeinerung der Bezeichnungen (3) eine Tabelle, die reducirten Querschnitte betreffend, hier an:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} O_m &= E_1 \Omega_m \cos^3 \varepsilon \\ o_m &= E \omega_m \cos^3 \gamma_m \\ r_m &= E \varrho_m \left(\frac{a_m}{b_m}\right)^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w_m &= \frac{o_m}{O_m + o_m} \\ u_m &= \frac{O_m o_m}{O_m + o_m} \end{aligned}$$

[1]) Die Eigenschaft der Congruenz ist leicht zu erkennen, wenn man beachtet, dass, in den Grenzen der Annäherung dieser Methode, zwei correspondirende Punkte der Achsen $\Omega' \Omega''$ sich nach der Deformation in gleichen und zur ursprünglichen geraden Richtung der Achse, welcher sie zugehören, normalen Distanzen befinden.

II. Capitel.

Bestimmung der halben Summen ξ_{mp} η_{mp} etc.

(Componenten in Folge der Inanspruchnahme [P].)

§. IV. Gleichgewichts-Gleichungen.

Für das verticale Gleichgewicht des über die $m-1^{ten}$ Knotenpunkte liegenden Theiles des Pfeilers besteht die Bedingung:

$$([\Omega'_m] + [\Omega''_m])\cos\varepsilon + ([\omega'_m] + [\omega''_m])\cos\gamma_m = 2\left(P + \sum_1^{m-1} p_i\right) + p_m.$$

Transformirt man diese Gleichung mittelst (II), setzt $m = 1$ bis $m = n$, berücksichtigt die Bezeichnungen (2) und (III) und setzt:

$$\text{(IV)} \qquad P_m = P + \sum_1^{m-1} p_i + \frac{1}{2} p_m,$$

so erhält man ein System, welches, mit den Gleichungen (I) reducirt, die Form annimmt:

$$\eta_{op} - \eta_{1p} = \frac{P_1 a_1}{O_1 + o_1} + \quad . \quad + \left(\frac{b_0 w_1}{a_1} + \operatorname{tang}\varepsilon\right)\xi_{1p}$$

. . . .

$$\text{(V)} \quad \eta_{m-1p} - \eta_{mp} = \frac{P_m a_m}{O_m + o_m} + \left(\frac{b_m w_m}{a_m} - \operatorname{tang}\varepsilon\right)\xi_{m-1p} + \left(\frac{b_{m-1} w_m}{a_m} + \operatorname{tang}\varepsilon\right)\xi_{mp}$$

. . . .

$$\eta_{n-1p} = \frac{P_n a_n}{O_n + o_n} + \left(\frac{b_n w_n}{a_n} - \operatorname{tang}\varepsilon\right)\xi_{n-1p}$$

woraus die Verallgemeinerung in Bezug auf das System (5) ersichtlich ist.

Projicirt man die Beanspruchungen der Stangen, welche in m' und m'' zusammenlaufen, auf die zu den Säulenachsen Normalen, so erhält man die Gleichungen:

$$\text{(VI)} \quad \begin{aligned} X'_m &= [\omega'] \sin(\gamma_m - \varepsilon) + [\omega''_{m+1}] \sin(\gamma_{m+1} + \varepsilon) - [\varrho_m] \cos\varepsilon \\ X''_m &= [\omega''] \sin(\gamma_m - \varepsilon) + [\omega'_{m+1}] \sin(\gamma_{m+1} + \varepsilon) - [\varrho_m] \cos\varepsilon \end{aligned}$$

Summirt man die Gleichungen (VI) und transformirt das Resultat mittelst (II) bei Berücksichtigung der Bezeichnungen (2), so erhält man

einen Ausdruck für X_{mp}, in welchem die halben Summen der verticalen Verschiebungen nur in der Form enthalten sind:

$$\eta_{m-1p} - \eta_{mp}, \quad \eta_{mp} - \eta_{m+1p};$$

eliminirt man dieselben sodann mit der m^{ten} und $m + 1^{\text{ten}}$ Gleichung des Systemes (v), so ergibt sich nach einigen auf Grund von (I) durchgeführten Reducirungen, nach Division durch $\cos\varepsilon$ und mittelst der Bezeichnungen (III) die Fundamental-Gleichung für die Bestimmung der ξ_p:

$$\text{(VII)} \quad \frac{X_{mp}}{\cos\varepsilon} = \frac{b_{m-1} w_m}{a_m} P_m + \frac{b_{m+1} w_{m+1}}{a_{m+1}} P_{m+1} - \frac{b_{m-1} b_m}{a^3_m} u_m \xi_{m-1p} -$$

$$- \left(\frac{b^2_{m-1}}{a^3_m} u_m + 2 \frac{b^2_m}{a^3_m} r_m + \frac{b^2_{m+1}}{a^3_{m+1}} u_{m+1} \right) \xi_{mp} - \frac{b_m b_{m+1}}{a^3_{m+1}} u_{m+1} \xi_{m+1p}.$$

Setzt man $\varepsilon = 0$ und angenommen, dass Ω, ω, ϱ, γ für die verschiedenen Felder constant seien, so wird obige Gleichung mit (7) identisch.

§. V. Lösung der Aufgabe, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet.

Unter dieser Annahme resultirt für die Gleichgewichtsbedingungen der Knotenpunkte m' und m'' in Bezug auf die zu den Säulenachsen normalen Richtungen:

$$X'_m = \frac{p_m + p_{m+1}}{2} \sin\varepsilon + q_m \cos\varepsilon$$

$$X''_m = \frac{p_m + p_{m+1}}{2} \sin\varepsilon - q_m \cos\varepsilon,$$

durch Summirung und darauffolgende Division durch $\cos\varepsilon$ erhält man:

$$\frac{X_{mp}}{\cos\varepsilon} = \frac{p_m + p_{m+1}}{2} \operatorname{tang}\varepsilon.$$

Die Gleichung (VII), von $m = 1$ bis $m = n - 1$ anwendbar, gibt uns ein System zur Bestimmung der ξ_p, von der allgemeinen Form:

$$\text{(VIII)} \quad \mathfrak{a}_{m1} \xi_{m-1p} + \mathfrak{a}_{m2} \xi_{mp} + \mathfrak{a}_{m3} \xi_{m+1p} = \frac{b_{m-1p} w_m}{a_m} P_m +$$

$$+ \frac{b_{m+1} w_{m+1}}{a_{m+1}} P_{m+1} - \frac{p_m + p_{m+1}}{2} \operatorname{tang}\varepsilon,$$

worin, der Kürze halber, die Coëfficienten der ξ_p in (VII) mit $\mathfrak{a}_{m1} \ldots$ etc. bezeichnet sind.

Wir erinnern uns, dass für die Endgleichungen besteht:

$$\xi_{0p} = \xi_{np} = 0.$$

Eine bemerkenswerthe Vereinfachung findet statt, wenn man Ω, ω, ϱ als gleich voraussetzt, nachdem auch die Winkel γ der verschiedenen Felder gleich sind.

In diesem Falle sind auch die Werte $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{r}$ für alle Felder constant; setzt man:

$$\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{a}_m}{\mathfrak{a}_{m+1}} = \frac{\mathfrak{b}_m}{\mathfrak{b}_{m+1}} = \text{Constante.}$$

so wird die allgemeine Gleichung (VIII), wenn man die Zeiger der Coëfficienten weglässt und kleine Umgestaltungen vornimmt, auf die folgende Form reducirt:

$$\text{(VIII')}\quad \begin{aligned} &\mathfrak{e}\,\mathfrak{u}\,\xi_{m-1p} + ([\mathfrak{e} + \mathfrak{e}^2]\,\mathfrak{u} + 2\mathfrak{r})\,\xi_{mp} + \mathfrak{e}^2\mathfrak{u}\,\xi_{m+1p} = \\ &= \frac{\mathfrak{a}^2_m}{\mathfrak{b}_m}\left(\mathfrak{w}[\mathfrak{e}\,P_m + P_{m+1}] - \frac{1-\mathfrak{e}}{4}(p_m + p_{m+1})\right) \end{aligned}$$

§. VI. Die Continuität der Säulen und ihre Befestigung an den Enden in Rechnung gezogen.

Zur directen Bestimmung der ξ_p kann man in diesem Falle nur auf die Weise gelangen, dass man die Höhe der Felder als gleich voraussetzt; in der That gelingt es nur mit dieser Annahme, den expliciten Ausdruck (N) (Einleitung IV) des Biegungs-Momentes zu bestimmen und das System (O) aufzustellen, welches nur die Höhenunterschiede der Stützpunkte und die Reactionen enthält.

Bei Anwendung dieses Systemes müssen wir ferner das Trägheits-Moment I der Säule als constant annehmen, ebenso wie den Querschnitt Ω und den reducirten Querschnitt O. Wegen Vereinfachung der Formeln setzen wir ferner voraus, dass der Winkel ε so klein sei, dass der Einfluss der verticalen Verschiebungen η auf die Höhenunterschiede der Stützpunkte vernachlässigt werden kann; dies entspricht einer Vernachlässigung der Glieder mit $\mathfrak{i}^2 \sin\varepsilon$ in Bezug auf die Ausdrücke mit $\mathfrak{b}^2_m$[1]).

---

[1]) Die strengen Ausdrücke:

$$x_m = \eta'_m \sin\varepsilon - \xi'_m \cos\varepsilon \qquad\qquad x_m = \eta''_m \sin\varepsilon - \xi'_m \cos\varepsilon$$

Setzt man:

$$l = \frac{a}{\cos\varepsilon},\quad E = E_1,\quad I = \Omega i^2,\quad q = p \sin\varepsilon,\quad x_n = t_n = 0,$$

wobei mit p das Eigengewicht der Säule bezeichnet ist, so kann man damit das System (o) für den vorliegenden Fall umgestalten.

Für die Säule Ω':

$$X_m = X'_m - q_m \cos\varepsilon \qquad x_m = -\xi'_m \cos\varepsilon \qquad t_0 = \frac{\eta''_0 - \eta'_0}{b_0} = \frac{2\eta_{0q}}{b_0}$$

und für die Säule Ω'':

$$X_m = X''_m + q_m \cos\varepsilon \qquad x_m = -\xi''_m \cos\varepsilon \qquad t_0 = -\frac{2\eta_{0q}}{b_0}.$$

Summirt man die beiden Systeme von Gleichungen und beachtet, dass $\frac{2pa}{\cos\varepsilon} = 2p_0 =$ dem (constanten) Eigengewichte eines Feldes, so erhält man ein System, welches, durch $\cos\varepsilon$ dividirt, sich folgend ergibt:

$$\frac{7X_{1p}}{\cos\varepsilon} + \frac{2X_{2p}}{\cos\varepsilon} =$$
$$= \frac{6Oi^2}{a^3}(18\xi_{1p} - 9\xi_{2p} + 2\xi_{3p}) + 9p_0 \operatorname{tang}\varepsilon$$

. . . .

$$\text{(XI)}\qquad \frac{X_{m-1p}}{\cos\varepsilon} + \frac{4X_{mp}}{\cos\varepsilon} + \frac{X_{m+1p}}{\cos\varepsilon} =$$
$$= \frac{6Oi^2}{a^3}(\xi_{m-2p} - 4\xi_{m-1p} + 6\xi_{mp} - 4\xi_{m+1p} + \xi_{m+2p}) + 6p_0 \operatorname{tang}\varepsilon$$

. . . .

$$\frac{2X_{n-2p}}{\cos\varepsilon} + \frac{7X_{n-1p}}{\cos\varepsilon} =$$
$$= \frac{6Oi^2}{a^3}(2\xi_{n-3p} - 9\xi_{n-2p} + 18\xi_{n-1p}) + 9p_0 \operatorname{tang}\varepsilon.$$

in das System (o) substituirt, würden zu den Ausdrücken mit ξ_p in den Klammern des zweiten Gliedes der allgemeinen Gleichung (IX) die Ausdrücke hinzufügen:

$$(-\eta_{m-2p} + 4\eta_{m-1p} - 6\eta_{mp} + 4\eta_{m+1p} - \eta_{m+2p}) \operatorname{tang}\varepsilon;$$

bemerkt man, dass sich dieses Polynom mit η_p auch schreiben lässt:

$$-(\eta_{m-2p} - \eta_{m-1p}) + 3(\eta_{m-1p} - \eta_{mp}) - 3(\eta_{mp} - \eta_{m+1p}) + (\eta_{m+1p} - \eta_{m+2p}),$$

so zeigt sich, wie dasselbe mittelst (V) eliminirt werden kann.

Diese Eliminirung bietet, von der Weitläufigkeit der Formeln abgesehen, keine Schwierigkeiten. Es ist auch ersichtlich, wie aus den so erhaltenen strengen Formeln die Beanspruchung [Q] ausgeschlossen bleibt.

Substituirt man im Systeme (IX) die X_{mp} aus (VII), wobei man die Zeiger von a weglässt, und beachtet, dass nach (IV):

$$P_m = P + \left(m - \frac{1}{2}\right) p_0',$$

so erhält man das allgemeine System für die Bestimmung der ξ_p:

$$\text{(X)}\quad \begin{aligned}
&a_{1.3}\,\xi_{1p} + a_{1.4}\,\xi_{2p} + a_{1.5}\,\xi_{3p} = (c_{1.1}\,P + c_{1.2}\,p_0)\,a^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m.1}\,\xi_{m-2p} + a_{m.2}\,\xi_{m-1p} + a_{m.3}\,\xi_{mp} + a_{m.4}\,\xi_{m+1p} + a_{m.5}\,\xi_{m+2p} = \\
&\qquad = (c_{m.1}\,P + c_{m.2}\,p_0)\,a^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{n-1.1}\,\xi_{n-3p} + a_{n-1.2}\,\xi_{n-2p} + a_{n-1.3}\,\xi_{n-1p} = (c_{n-1.1}\,P + c_{n-1.2}\,p_0)\,a^2
\end{aligned}$$

worin die Coëfficienten a und c gegeben sind mit:

$$\text{(XI)}\quad \begin{aligned}
a_{1.3} &= 7\,b_0^2\,u_1 + b_2\,(2\,b_1 + 7\,b_2)\,u_2 + 14\,b_1^2\,r_1 + 108\,O\,i^2 \\
a_{1.4} &= b_1\,(2\,b_1 + 7\,b_2)\,u_2 + 2\,b_3^2\,u_3 + 4\,b_2^2\,r_2 - 54\,O\,i^2 \\
a_{1.5} &= 2\,b_2\,b_3\,u_3 + 12\,O\,i^2 \\
c_{1.1} &= 7\,b_0\,w_1 + (2_1 + 7\,b_2)\,w_2 + 2\,b_3\,w_3 \\
c_{1.2} &= \tfrac{7}{2}\,b_0\,w_1 + \tfrac{3}{2}\,(2\,b_1 + 7\,b_2)\,w_2 + 5\,b_3\,w_3 - 18\,a \operatorname{tang} \varepsilon \\
a_{m.1} &= b_{m-2}\,b_{m-1}\,u_{m-1} + 6\,O\,i^2 \\
a_{m.2} &= b^2_{m-2}\,u_{m-1} + b_m\,(4\,b_{m-1} + b_m)\,u_m + 2\,b^2_{m-1}\,r_{m-1} - 24\,O\,i^2 \\
a_{m.3} &= b_{m-1}\,(4\,b_{m-1} + b_m)\,u_m + b_{m+1}\,(b_m + 4\,b_{m+1})\,u_{m+1} + \\
&\qquad + 8\,b^2_m\,r_m + 36\,O\,i^2 \\
a_{m.4} &= b_m(b_m + 4\,b_{m+1})\,u_{m+1} + b^2_{m+2}\,u_{m+2} + 2\,b^2_{m+1}\,r_{m+1} - 24\,O\,i^2 \\
a_{m.5} &= b_{m+1}\,b_{m+2}\,u_{m+2} + 6\,O\,i^2 \\
c_{m.1} &= b_{m-2}\,w_{m-1} + (4\,b_{m-1} + b_m)\,w_m + (b_m + 4\,b_{m+1})\,w_{m+1} + \\
&\qquad + b_{m+2}\,w_{m+2} \\
c_{m.2} &= (m - \tfrac{3}{2})\,b_{m-2}\,w_{m-1} + (m - \tfrac{1}{2})\,(4\,b_{m-1} + b_m)\,w_m + \\
&\qquad + (m + \tfrac{3}{2})\,b_{m+2}\,w_{m+2} + (m + \tfrac{1}{2})\,(b_m + 4\,b_{m+1})\,w_{m+1} - 12\,a \operatorname{tang} \varepsilon \\
a_{n-1.1} &= 2\,b_{n-2}\,b_{n-3}\,u_{n-2} + 12\,O\,i^2 \\
a_{n-1.2} &= 2\,b^2_{n-3}\,u_{n-2} + b_{n-1}\,(7\,b_{n-2} + 2\,b_{n-1})\,u_{n-1} + 4\,b^2_{n-2}\,r_{n-2} - \\
&\qquad - 54\,O\,i^2 \\
a_{n-1.3} &= b_{n-2}\,(b_{n-2} + 2\,b_{n-1})\,u_{n-1} + 7\,b^2_n\,u^2_n + 14\,b^2_{n-1}\,r_{n-1} + \\
&\qquad + 108\,O\,i^2 \\
c_{n-1.1} &= 2\,b_{n-3}\,w_{n-2} + (7\,b_{n-2} + 2\,b_{n-1})\,w_{n-1} + 7\,b_n\,w_n \\
c_{n-1.2} &= (2\,n - 5)\,b_{n-3}\,w_{n-2} + (n - \tfrac{3}{2})\,(7\,b_{n-2} + 2\,b_{n-1})\,w_{n-1} + \\
&\qquad + 7\,(n - \tfrac{1}{2})\,b_n\,w_n - 18\,a \operatorname{tang} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es ist leicht zu ersehen, dass, für $\varepsilon = 0$ und γ, ω, ϱ als constant vorausgesetzt, die Coëfficienten (XI) mit jenen von (11) identisch werden.

Aus (N) erhält man schliesslich mit der früher erwähnten Vertauschung der Bezeichnungen die allgemeine Gleichung der μ_p für die $n - 1$ Zwischen-Knotenpunkte:

$$\text{(XII)} \qquad \mu_{mp} = \frac{a}{6} \cdot \frac{X_{mp}}{\cos\varepsilon} - O\,\frac{i^2}{a^2}\,(\xi_{m-1p} - 2\,\xi_{mp} + \xi_{m+1p})$$

und für die fest eingespannten Querschnitte:

$$\text{(XII')} \qquad \begin{aligned} \mu_{op} &= -\frac{a}{12} \cdot \frac{X_{1p}}{\cos\varepsilon} - O\,\frac{i^2}{a^2}\,(5\,\xi_{1p} - \xi_{2p}) \\ \mu_{np} &= -\frac{a}{12} \cdot \frac{X_{n-1p}}{\cos\varepsilon} - O\,\frac{i^2}{a^2}\,(5\,\xi_{n-1p} - \xi_{n-2p}) \end{aligned}$$

Die bisher entwickelten Formeln geben den strengen Beweis des Fundamental-Lehrsatzes auch für den ebenen Pfeiler mit geneigten Säulen[1]). Erinnern wir uns daher der doppelten Bedeutung, welche man den Buchstaben mit den Zeigern p und q auch für denselben geben kann.

§. VII. Explicite, angenäherte Lösung.

Die Ungleichheit der geometrischen Elemente und daher von u und w, von Feld zu Feld macht es unmöglich, einen Ausdruck für ξ_{mp} aufzustellen, welcher in strenger Weise den allgemeinen Gleichungen der Systeme (VIII) oder (X) genügt. Für das System (VIII') dagegen, bezüglich des Pfeilers mit geometrisch ähnlichen Feldern, existirt ein solcher Ausdruck, wenn man von dem Eigengewichte, welches in den aufeinander folgenden Feldern ungleich ist, absieht und annimmt:

$$p_m = 0, \quad P_m = P.$$

Setzt man:

$$\text{(XIII)} \qquad \psi_{(e)} = \frac{w}{(e + e^2)\,u + r} = \frac{o}{Or + (e + e^2)\,Oo + or},$$

[1]) Man kann sich leicht überzeugen, dass bei Annahme der Continuität der Säulen die Richtigkeit des Lehrsatzes nicht auf die Voraussetzung der gleichen Höhe der Felder beschränkt ist, eine Voraussetzung, welche nur gemacht wurde, um die Anwendung des Systemes (O) zu rechtfertigen. Im anderen Falle würde der allgemeine Vorgang der Rechnung ebenfalls zu einem Systeme von Gleichungen zwischen den Verschiebungen der Säulen, unabhängig von der Beanspruchung (Q), führen; dieser Vorgang besteht darin, dass man die μ_p in Functionen der ξ_p, mittelst des aus (M) abgeleiteten Systemes, auf das Studium der Biegung der Säulen angewendet, und dann die X_p in Functionen der μ_p ausdrückt.

so kann man beweisen, dass der Ausdruck:

$$\xi_{mp} = \psi_{(e)} \frac{a^2_m}{b_m} \cdot \frac{1+e}{2} P \tag{XIV}$$

den $n - 3$ Zwischen-Gleichungen des Systemes (VIII') strenge genügt, wenn man, wie schon erwähnt, dasselbe durch die Vernachlässigung des Eigengewichtes vereinfacht.

Setzt man voraus, dass die End-Knotenpunkte horizontalen Verschiebungen, und zwar unter denselben Bedingungen, wie die Zwischen-Knotenpunkte unterliegen, so würde (XVI) die strenge Lösung der Aufgabe bezüglich der Belastungen P ergeben. Beachtet man, dass wegen der Aehnlicheit der Felder $\frac{a_m}{b_m}$ = constant, so zeigt (XIV), dass sich, mit besagter Annahme, die ξ_{mp} proportional zu den a_m ergeben würden, d. h. die Säulenachsen, welche geradlinig bleiben, würden sich verschieben, indem sie sich um ihren Schnittpunkt A drehen, eine elegante Verallgemeinerung der aus (14) §. 7 abgeleiteten Eigenschaft, nach welcher die Säulen, vom Eigengewichte abgesehen, dagegen eine parallele Verschiebung erleiden.

Mit Annahme des Ausdruckes (XIV) ergeben (II) mit (V), nach einigen auf Grund von (I) durchgeführten Reducirungen, die Ausdrücke für die inneren, für alle Fälle constanten Kräfte:

$$\text{(XVII)} \qquad \begin{aligned} [\Omega]_p &= (1 - \psi_{(e)} r) \frac{P}{\cos \varepsilon} \\ [\omega]_p &= \psi_{(e)} r \frac{'P}{\cos \gamma} \\ [\varrho]_p &= \psi_{(e)} r \frac{2P}{\cot \gamma}, \end{aligned}$$

wobei man das Eigengewicht mit einer für die angenäherte Art der Lösung genügenden Genauigkeit in Rechnung ziehen kann, indem man in den beiden ersten Ausdrücken von (XVII) P_m für P und in der letzten $P_m + P_{m+1}$ für 2P setzt.

Schliesslich werden wir für einen Pfeiler, welcher von der Bedingung der geometrischen Aehnlichkeit der Felder nicht viel abweicht und bei welchem die Querschnitte der Glieder von Feld zu Feld nur

um einen kleinen Bruchtheil variiren (beide Bedingungen sind im Allgemeinen erfüllt) die (XVII) annehmen, wobei wir den Grössen γ, O, o, r wieder die Zeiger m geben und $e_m = \frac{a_m}{a_{m+1}}$ annehmen.

Der Kürze halber unterlassen wir es, die so modificirten Formeln, welche in der Tabelle §. XV gegeben sind, neuerdings aufzuschreiben.

III. Capitel.

Bestimmung der halben Differenzen ξ_{mq} η_{mq} etc.

(Componenten in Folge der Beanspruchung [Q].)

§. IX. Allgemeine Gesetze etc. — Bezeichnungen.

Auf Grund des Fundamental-Lehrsatzes ergeben sich für den einfachen Pfeiler mit convergirenden Säulen, wie wir schon im §. II erwähnten, die Gesetze für die inneren Kräfte in Folge der Beanspruchung [Q] identisch mit jenen, welche im §. 9 für den einfachen Pfeiler mit verticalen Säulen aufgestellt wurden.

Die Aufgabe der Bestimmung der halben Differenzen oder Componenten in Folge von [Q], der inneren Kräfte und Verschiebungen, ist daher in ganz analoger Weise zu lösen, wie bei der Behandlung des speciellen Falles des verticalen Pfeilers.

Indem wir alle gewöhnlichen Bezeichnungen beibehalten, nennen wir noch (Fig. 24):

M_m — das Moment aller äusseren Kräfte, welche den über dem m^{ten} Felde liegenden Theil des Pfeilers in Bezug auf den Kreuzungspunkt B der m^{ten} geneigten Stangen beanspruchen.

N_m — das Moment derselben Kräfte in Bezug auf den Schnittpunkt A der Säulenachsen.

Die so definirten Momente enthalten offenbar nur die Kräfte, welche zu [Q] gehören.

d_m — die Länge der horizontalen Strecke durch den Kreuzungspunkt B der m^{ten} geneigten Stangen bis zum Schnitte mit den beiden Säulenachsen.

D_m — die Länge der Horizontalen durch den Schnittpunkt A der beiden Säulen bis zu den Achsen der m^{ten} geneigten Stangen.

Diese beiden Längen werden ausgedrückt durch:

$$(\Delta) \qquad d_m = \frac{2\,b_m\,b_{m-1}}{b_m + b_{m-1}}$$

$$D_m = \frac{2\,b_m\,b_{m-1}}{b_m - b_{m-1}}.$$

§. x. **Gleichgewichts-Gleichungen.**

Wenn man den Pfeiler unmittelbar über den m^{ten} Knotenpunkten durch auf die Säulen normale Ebenen $\overline{zz}$ schneidet und die Distanz zwischen dem Knotenpunkte m und dem Fusspunkte der Senkrechten von B auf die Säulenachse c_m benennt (Fig. 24), so ergeben sich für das Gleichgewicht des Pfeilers oberhalb von $\overline{zz}$ in Bezug auf die Drehung um die Punkte B und A die folgenden Bedingungen:

$$([\Omega''_m] - [\omega'_m])\,\frac{d^m \cos\varepsilon}{2} = M_m - \mu' + \mu'' + (\tau'_m - \tau''_m)\,c_m$$

$$([\omega''_m] - [\omega'_m])\,\frac{D_m \cos\gamma_m}{2} = N_m + \mu'_m - \mu''_m - (\tau'_m - \tau''_m)\,\frac{b_m}{2\sin\varepsilon}.$$

Eliminirt man c_m, τ'_m, τ'' durch die folgenden Gleichungen:

$$c_m = \frac{b_m \cos(\gamma_m - \varepsilon)}{2\sin\gamma_m}$$

$$\tau'_m = \frac{-\mu'_{m-1} + \mu'_m}{a_m}\cos\varepsilon \qquad \tau''_m = \frac{-\mu''_{m-1} + \mu''_m}{a_m}\cos\varepsilon,$$

so kann man die früheren Gleichungen, nach einigen auf Grund von (I) durchgeführten Reducirungen, in folgender Form schreiben:

$$(\text{XVIII}) \qquad [\Omega_m]_q \cos\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}_m}{d_m}$$

$$(\text{XIX}) \qquad [\omega_m]_q \cos\gamma_m = \frac{\mathfrak{N}_m}{D_m}.$$

wobei folgende Beziehungen bestehen:

(xx)

$$\frac{\mathfrak{M}_m}{d_m} = \frac{M_m}{d_m} - \alpha''_m \frac{\mu_{m-1q}}{b_{m-1}} - \alpha'_m \frac{\mu_{mq}}{b_m}$$

$$\frac{\mathfrak{N}_m}{d_m} = \frac{N_m}{D_m} + \frac{\mu_{m-1q}}{b_{m-1}} - \frac{\mu_{mq}}{a_m}$$

$$\alpha'_m = \frac{\cos(\gamma_m + \varepsilon)\cos\varepsilon}{\cos\gamma_m} = 1 - \frac{b_m}{a_m}\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\alpha''_m = \frac{\cos(\gamma_m - \varepsilon)\cos\varepsilon}{\cos\gamma_m} = 1 + \frac{b_{m-1}}{a_m}\sin\varepsilon\cos\varepsilon.$$

Substituirt man in (XVIII) und (XIX) die Ausdrücke für die Beanspruchungen in Functionen der Verschiebungen, mit Berücksichtigung von (III) und indem man die Zeiger von 1 bis n variiren lässt, so erhält man folgende zwei Systeme:

(XXI)

$$\eta_{0q} - \eta_{1q} = \frac{a_1}{O_1} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{d_1} - (\xi_{0q} - \xi_{1q}) \operatorname{tang} \varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta_{m-1q} - \eta_{mq} = \frac{a_m}{O_m} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{d_m} - (\xi_{m-1q} - \xi_{mq}) \operatorname{tang} \varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta_{n-1q} = \frac{a_n}{O_n} \cdot \frac{\mathfrak{M}_n}{d_n} - (\xi_{n-1q} \dots) \operatorname{tang} \varepsilon$$

(XXII)

$$\xi_{0q} - \xi_{1q} = \left(\frac{a_1}{o_1} \cdot \frac{\mathfrak{N}_1}{D_1} + \eta_{0q} + \eta_{1q}\right) \cot \gamma_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{m-1q} - \xi_{mq} = \left(\frac{a_m}{o_m} \cdot \frac{\mathfrak{N}_m}{D_m} + \eta_{m-1q} + \eta_{mq}\right) \cot \gamma_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{n-1q} = \left(\frac{a_n}{o_n} \cdot \frac{\mathfrak{N}_n}{D_n} + \eta_{n-1q} \dots\right) \cot \gamma_n.$$

Die (XVIII), (XIX), (XXI), (XXII) bilden die Fundamental-Formeln zur Lösung der Aufgabe.

§. XI. Lösung der Aufgabe, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet.

Bei dieser Annahme hat man:

$$\mathfrak{M}_m = M_m \qquad \mathfrak{N}_m = N_m$$

und die Bestimmung der Verschiebungen kann man in der folgenden Weise durchführen. Eliminirt man die Differenzen $\xi_{m-1q} - \xi_{mq}$ aus jeder Gleichung von (XXI) und der correspondirenden von (XXII), so erhält man ein System mit η_q, welches nach einigen mit Zuhilfenahme von (I) und (Δ) durchgeführten Transformationen auf die allgemeine, sehr symmetrische Form reducirt werden kann:

$$\text{(XXI')} \qquad \frac{\eta_{m-1q}}{b_{m-1}} - \frac{\eta_{mq}}{b_m} = \frac{a_m}{O_m} \cdot \frac{M_m}{d^2_m} - \frac{a_m}{o_m} \cdot \frac{N_m}{D^2_m}.$$

Hieraus kann man, bei Beachtung von $\eta_{nq} = 0$, durch aufeinander folgende Summirung die η_q erhalten, und mit diesen ergibt das System (XXII) durch successive Summirung die ξ_q.

Ferner geben (XVIII) und (XIX) die expliciten Ausdrücke der Beanspruchungen:

$$\text{(XXIII)} \qquad [\Omega_m]_q = \frac{M_m}{d_m \cos \varepsilon}, \qquad [\omega_m]_q = \frac{N_m}{D_m \cos \gamma_m}.$$

§. XII. **Die Continuität der Säulen und ihre Befestigung an den Enden in Rechnung gezogen.**

Bei dieser Annahme kann man die Bestimmung der μ_q wie in den analogen, schon behandelten Fällen durchführen, indem man die Systeme (XXI) und (XXII) mit den Gleichungen (M) des continuirlichen Trägers, welcher auf Stützpunkten in verschiedenen Höhen ruht und an den Enden eingespannt ist, combinirt.

Wenn man alle geometrischen Elemente des Pfeilers von Feld zu Feld verschieden annimmt, ausgenommen das Trägheits-Moment I, den Querschnitt Ω und den reducirten Querschnitt O, so wenden wir für das Studium der Säule das System (M) an, indem wir es mit folgenden Ausdrücken transformiren:

$$l_m = \frac{a_m}{\cos \varepsilon}, \quad E = E_1, \quad I = \Omega i^2, \quad q = p \sin \varepsilon, \quad x_n = t_n = 0,$$

ferner für die Säule Ω':

$$x_m = \eta'_m \sin \varepsilon - \xi'_m \cos \varepsilon, \qquad M_m = \mu'_m, \qquad t_0 = \frac{2\eta_{0q}}{b_0};$$

und für die Säule Ω'':

$$x_m = \eta''_m \sin\varepsilon - \xi''_m \cos\varepsilon, \qquad M_m = \mu''_m, \qquad t_0 = -\frac{2\eta_{0q}}{b_0}.$$

Subtrahirt man die beiden Systeme, so erhält man bei Berücksichtigung der gewöhnlichen allgemeinen Bezeichnungen ein mit (24) analoges System:

$$\frac{2\eta_{0q}}{b_0} - \frac{\xi_{0q} - \xi_{1q}}{a_1}\cos^2\varepsilon + \frac{\eta_{0q} - \eta_{1q}}{a_1}\sin\varepsilon\cos\varepsilon =$$
$$= \frac{\cos^2\varepsilon}{6\,O\,i^2}(2a_1\mu_{0q} + a_1\mu_{1q})$$

. . . .

$$\text{(XXIV)}\quad \left(\frac{\xi_{m-1q} - \xi_{mq}}{a_m} - \frac{\xi_{mq} - \xi_{m+1q}}{a_{m+1}}\right)\cos^2\varepsilon -$$
$$- \left(\frac{\eta_{m-1q} - \eta_{mq}}{a_m} - \frac{\eta_{mq} - \eta_{m+1q}}{a_{m+1}}\right)\sin\varepsilon\cos\varepsilon =$$
$$= \frac{\cos^2\varepsilon}{6\,O\,i^2}(a_m\mu_{m-1q} + 2[a_m + a_{m+1}]\mu_{mq} + a_{m+1}\mu_{m+1q})$$

. . . .

$$\frac{\xi_{n-1q}}{a_n}\cos^2\varepsilon - \frac{\eta_{n-1q}}{a_n}\sin\varepsilon\cos\varepsilon = \frac{\cos^2\varepsilon}{6\,O\,i^2}(a_n\mu_{n-1q} + 2a_n\mu_{nq}).$$

Die Eliminirung der η_q und ξ_q aus den drei Systemen (XXI), (XXII) und (XXIV) zur Auffindung eines Systemes, welches nur die μ_q enthält, ist in diesem Falle etwa umständlicher.

Substituirt man in den vorigen Gleichungen die Differenzen $\eta_{m-1q} - \eta_{mq}$ aus (XXI) und bezeichnet der Kürze halber mit $(\mu)_{(m)}$ die in den zweiten Gliedern zwischen den Klammern stehenden Polynome von μ_q, so erhält man:

$$\frac{2\eta_{0q}}{b_0} - \frac{\xi_{0q} - \xi_{1q}}{a_1} = \frac{\cos^2\varepsilon}{6\,O\,i^2}(\mu)_{(0)} + \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{O}\left(\;\cdot\; - \frac{\mathfrak{M}_1}{d_1}\right)$$

. . . .

$$\text{(XXIV}'\text{)}\quad \frac{\xi_{m-1q} - \xi_{mq}}{a_m} - \frac{\xi_{mq} - \xi_{m+1q}}{a_{m+1}} = \frac{\cos^2\varepsilon}{6\,O\,i^2}(\mu)_{(m)} + \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{O}\left(\frac{\mathfrak{M}_m}{d_m} - \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{d_{m+1}}\right)$$

. . . .

$$\frac{\xi_{n-1q}}{a_n}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; = \frac{\cos^2\varepsilon}{6\,O\,i^2}(\mu)_{(n)} + \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{O}\left(\frac{\mathfrak{M}_n}{d_n}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\right)$$

Wir transformiren jetzt das System (XXII), indem wir jede m^{te} Gleichung desselben mit tang γ_m multipliciren und sodann jede Gleichung von der vorhergehenden abziehen. Die beiden Endgleichungen behalten wir, nachdem wir die Zeichen wechseln und zu den beiden Gliedern der ersten $2\eta_{0q}$ addiren.

Beachtet man, dass:

$$\operatorname{tang} \gamma_m = \frac{\mathfrak{b}_m}{\mathfrak{a}_m} - \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\mathfrak{b}_{m-1}}{\mathfrak{a}_m} + \operatorname{tang} \varepsilon,$$

so ergibt sich das in dieser Weise erhaltene System wie folgt:

$$\left(\frac{2\eta_{0q}}{\mathfrak{b}_0} - \frac{\xi_{0q} - \xi_{1q}}{\mathfrak{a}_1}\right) \mathfrak{b}_0 = - \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{o}_1} \cdot \frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{D}_1} + $$
$$+ \eta_{0q} - \eta_{1q} + (\xi_{0q} - \xi_{1q}) \cdot \operatorname{tang} \varepsilon$$

. . . .

$$\text{(XXII}') \quad \left(\frac{\xi_{m-1q} - \xi_{mq}}{\mathfrak{a}_m} - \frac{\xi_{mq} - \xi_{m+1q}}{\mathfrak{a}_{m+1}}\right) \mathfrak{b}_m = \frac{\mathfrak{a}_m}{\mathfrak{o}_m} \cdot \frac{\mathfrak{N}_m}{\mathfrak{D}_m} - \frac{\mathfrak{a}_{m+1}}{\mathfrak{o}_{m+1}} \cdot \frac{\mathfrak{N}_{m+1}}{\mathfrak{D}_{m+1}} +$$
$$+ \eta_{m-1q} - \eta_{m+1q} + (\xi_{m-1q} - \xi_{m+1q}) \operatorname{tang} \varepsilon$$

. . . .

$$\frac{\xi_{n-1q}}{\mathfrak{a}_n} \mathfrak{b}_n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = \frac{\mathfrak{a}_n}{\mathfrak{o}_n} \frac{\mathfrak{N}_n}{\mathfrak{D}_n} + \eta_{n-1q} + \xi_{n-1q} \operatorname{tang} \varepsilon.$$

Nun kann man die Ausdrücke mit ξ_q aus dem ersten Gliede von (XXII′) mittelst (XXIV) und die Ausdrücke mit η_q und ξ_q aus dem zweiten Gliede auf gleiche Weise mittelst (XXI) eliminiren. Man erhält so ein System, welches mit Berücksichtigung von (XX) als einzige Unbekannte μ_q enthält. Durch Multiplication mit $\mathfrak{O}$ und Zusammenziehung der Coëfficienten der Unbekannten ergibt sich nach einigen, auf Grund aller vorstehenden Gleichungen und Beziehungen durchgeführten Reducirungen und wenn man noch setzt:

$$\text{(XXV)} \quad \begin{aligned} f_{m1} &= \frac{\mathfrak{b}_{m-1}\,\mathfrak{b}_m}{6\,\mathfrak{i}^2} \cos^2 \varepsilon - \frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{o}_m} + \alpha'_m \alpha''_m \\ f'_{m2} &= \frac{\mathfrak{b}^2_m}{3\,\mathfrak{i}^2} \cos^2 \varepsilon + \frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{o}_m} + \alpha'^2_m \\ f''_{m2} &= \frac{\mathfrak{b}^2_m}{3\,\mathfrak{i}^2} \cos^2 \varepsilon + \frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{o}_{m+1}} + \alpha''^2_{m+1} \end{aligned}$$

dieses System in der sehr symmetrischen Form:

$$f''_{02}\,a_1\,\frac{\mu_{0q}}{b_0} + f_{01}\,a_1\;.\;\frac{\mu_{1q}}{b_1} =$$

$$= \left(\alpha''_1\,.\,\frac{M_1}{d_1} - \frac{O}{o_1}\,.\,\frac{N_1}{D_1}\right) a_1$$

. . . .

$$\text{(XXVI)}\quad f_{m1}\,a_m\,\frac{\mu_{m-1q}}{b_{m-1}} + (f'_{m2}\,a_m + f''_{m2}\,a_{m+1})\,\frac{\mu_{mq}}{b_m} + f_{m+1.1}\,a_{m+1}\,\frac{\mu_{m+1q}}{b_{m+1}} =$$

$$= \left(\alpha'_m\,.\,\frac{M_m}{d_m} + \frac{O}{o_m}\,.\,\frac{N_m}{D_m}\right) a_m + \left(\alpha''_{m-1}\,\frac{M_{m+1}}{d_{m+1}} - \frac{O}{o_{m+1}}\,.\,\frac{N_{m+1}}{D_{m+1}}\right) a_{m+1}$$

. . . .

$$f_{n1}\,a_n\,\frac{\mu_{n-1q}}{b_{n-1}} + \;.\;.\;.\;.\;\; f'_{n2}\,a_n\,\frac{\mu_{nq}}{b_n}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; =$$

$$= \left(\alpha'_n\,.\,\frac{M_n}{d_n} + \frac{O}{o_n}\,.\,\frac{N_n}{D_n}\right) a_n.$$

Es ist leicht zu ersehen, dass sich dieses System, wenn man $\varepsilon = 0$, ω und γ constant setzt, identisch mit (26) reducirt.

Bezüglich der numerischen Anwendung dieses Systemes bemerken wir:

1. Die in den Coëfficienten f enthaltenen Ausdrücke mit α' und α'' sind der Einheit sehr nahe, welche man auch ohne erheblichen Fehler bei Gegenwart der Ausdrücke mit $\frac{b^2}{i^2}$ dafür substituiren kann.

2. Die Ausdrücke mit N in den zweiten Gliedern der $n-1$ Zwischengleichungen haben nur einen geringen Einfluss, weil selbe mit entgegengesetzten Zeichen vorkommen. Es ist beispielsweise leicht, sich zu überzeugen, dass dieselben mit Ausnahme eines Ausdruckes mit q_m aus (XXVI) verschwinden, wenn man ω und γ als constant voraussetzt.

Vernachlässigt man jenen Ausdruck und lässt bei den constanten Grössen die Zeiger weg, so nimmt die allgemeine Gleichung die Form an:

$$\text{(XXVI')}\quad e f_{m1}\,\frac{\mu_{m-1q}}{b_{m-1}} + (e f'_{m2} + f''_{m2})\,\frac{\mu_{mq}}{b_m} + f_{m+1.1}\,\frac{\mu_{m+1q}}{b_{m+1}} =$$

$$= \frac{1+e}{2}\,.\,\frac{\alpha' M_m + \alpha'' M_{m+1}}{b_m},$$

wenn man die in den Coëfficienten f vorkommenden α' und α'' durch die Einheit substituirt, von beiden M das arithmetische Mittel nimmt und bemerkt, dass

$$\alpha' + \alpha'' = 2 \cos^2 \varepsilon,$$

so wird obige Gleichung bei Berücksichtigung von (Δ) und Weglassung der Striche bei den f_{m2}, welche zusammenfallen, auf die folgende Form vereinfacht:

$$\text{(XXVI}'') \quad \mathfrak{e} f_{m1} \frac{\mu_{m-1q}}{\mathfrak{b}_{m-1}} + (1 + \mathfrak{e}) f_{m2} \frac{\mu_{mq}}{\mathfrak{b}_m} + f_{m+1.1} \frac{\mu_{m+1q}}{\mathfrak{b}_{m+1}} = \\ = \frac{1 + \mathfrak{e}}{2} \cdot \frac{M_m + M_{m+1}}{\mathfrak{b}_m} \cos^2 \varepsilon.$$

Wenn man mit einem der obigen Systeme die $\frac{\mu_{mq}}{\mathfrak{b}_m}$ bestimmt hat, ergibt (XX):

$$\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{d}_m}, \quad \frac{\mathfrak{N}_m}{D_m},$$

womit sodann die Aufsuchung der Beanspruchungen und Verschiebungen wie im §. XI erfolgen kann.

§. XIII. Explicite, angenäherte Formeln.

Der allgemeinen Gleichung des Systemes (XXVI), auch in der vereinfachten Form (XXVI') und (XXVI''), können keine Ausdrücke von der Form:

$$\mu_{mq} = \frac{I}{J_m} M_m,$$

wobei J_m das Trägheits-Moment des Pfeilers an den m^{ten} Knotenpunkten bedeutet, in expliciter Weise genügen. In der That gründen sich die expliciten Lösungen der analogen Gleichungen bezüglich des verticalen Pfeilers hauptsächlich auf das Gesetz der gleichen Biegung von Körpern mit constantem Trägheits-Momente in Folge der mit den respectiven Trägheits-Momenten proportionalen Beanspruchung. Im vorliegenden Falle ist zwar das Trägheits-Moment der Säulen constant, dagegen ist jenes des Pfeilers variabel, und zwar wachsend nach abwärts, daher ist es auch klar, dass keine Annahme bezüglich der willkürlichen Elemente (ausgenommen die Annahme $\varepsilon = 0$) zu einer geometrischen Congruenz der deformirten Säulenachsen mit der deformirten Pfeilerachse führen kann.

Wir sehen daher von jedem Versuche der expliciten Lösung aus (XXVI) ab und nehmen analog mit (29) §. 13 an, dass unter der Voraussetzung der Continuität der Säulen die Ausdrücke für die Verschiebungen und inneren Kräfte mit jenen gleich sind, welche man erhält, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet, abgesehen von einem Corrections-Coëfficienten φ_m, welchen wir wegen der Analogie mit (28) von der folgenden Form annehmen:

$$\text{(XXVIII)} \qquad \varphi_m = \frac{d^2_m \cos^2 \varepsilon}{d^2_m \cos^2 \varepsilon + 4 i^2_m},$$

worin i_m den Trägheits-Radius der Säulen des m^{ten} Feldes bedeutet. Die so modificirten Formeln sind in der folgenden Tabelle gegeben.

§. XV. Tabelle der totalen inneren Kräfte, welche aus den Inanspruchnahmen [P] und [Q] resultiren.

Verallgemeinert man die Formel (XVII), wie am Ende des §. VIII angezeigt wurde, und benützt (XXIII) mit der am Ende des vorigen Paragraphen angedeuteten Modificirung, so resultiren für die Ausdrücke der totalen inneren Kräfte (mit genügender Annäherung für einen Pfeiler, bei welchem in der geometrischen Aehnlichkeit der Felder kein zu grosser Unterschied ist):

$$\left.\begin{matrix}[\Omega'_m] \\ [\Omega''_m]\end{matrix}\right\} = (1 - \psi_m r_m) \frac{P_m}{\cos \varepsilon} \mp \frac{\varphi_m M_m}{d_m \cos \varepsilon}$$

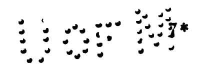
$$\left.\begin{matrix}[\omega'_m] \\ [\omega''_m]\end{matrix}\right\} = \psi_m r_m \frac{P_m}{\cos \gamma_m} \mp \frac{\varphi_m N_m}{D_m \cos \gamma_m}$$

$$[\varrho_m] = \psi_m r_m \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot \gamma_m},$$

worin:

$$\psi_m = \frac{o_m}{O_m r_m + (e_m + e^2_m) O_m o_m + o_m r_m} \qquad e_m = \frac{a_m}{a_{m+1}}$$

$2 P_m$ = Vertical-Componente . . . . .
M_m = Moment in Bezug auf den Punkt B
N_m = „ „ „ „ „ „ A
} aller Kräfte, welche den Pfeiler oberhalb des m^{ten} Feldes beanspruchen.



II. Abschnitt.

Der pyramidenförmige Pfeiler.

I. Capitel.

Bezeichnungen und Fundamental-Formeln.

§. XVI. Bezeichnungen.

Das geometrische Schema des pyramidenförmigen Pfeilers besteht aus vier symmetrisch geneigten Säulen, welche die Kanten eines Pyramyden-Stutzes bilden, die durch Gitterwerk in Form eines Andreas-Kreuzes auf den Seitenflächen und durch innere Diagonalstangen verbunden sind. (Fig. 25, Taf. VI.)

Wir werden die Bedingungen der Beanspruchung mit jenen des prismatischen Pfeilers gleich beibehalten, indem wir wegen Vereinfachung der Rechnung die gleichförmig vertheilte Kraft q durch die an den Knotenpunkten wirkenden Kräfte q_m ersetzen und ferner mit $4p_m$ das Eigengewicht des m^{ten} Feldes bezeichnen.

Die Höhe der Felder, die Querschnitte der Säulentheile, die Querschnitte der Stangen und ihre Neigungswinkel in den verschiedenen Feldern als ungleich vorausgesetzt, unterscheiden wir mit dem Zeiger m die relativen Grössen für das m^{te} Feld und mit einem Sterne die relativen Werthe für die Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$ und $\overline{\Omega''\Omega''}$, welche senkrecht auf die Ebene der Beanspruchung stehen.

Für die Glieder des Pfeilers und für die Beanspruchungen, welche dieselben erleiden, werden wir die gleichen Bezeichnungen gebrauchen, wie für den prismatischen Pfeiler, dagegen werden wir für jede Seitenfläche bezüglich der Winkel die Bezeichnungen des einfachen Pfeilers mit geneigten Säulen anwenden.

Wir bezeichnen daher (Fig. 26):

$\gamma_m \; \gamma_m^*$ — die Winkel, welchen die geneigten Stangen des m^{ten} Feldes auf jeder Seitenfläche mit der Winkelhalbirenden der Säulen einschliessen. (Achse der Seitenfläche.)

$\varepsilon, \; \varepsilon^*$ — die Winkel, welche eine Säule mit den Achsen der beiden Seitenflächen bildet.

ε_1 — der Winkel einer Säule mit der Verticalen.

$\varepsilon_2, \; \varepsilon_2^*$ — die Winkel der Ebenen der Seitenflächen mit der Verticalen.

δ — der Winkel der inneren Diagonalen mit den horizontalen Stangen der Seitenfläche $\overline{\Omega' \Omega''}$.

$90^0 + \vartheta$ — der Winkel der beiden anliegenden Seitenflächen.

$X'_m, \; X''_m$ — die auf die Seitenflächen $\overline{\Omega' \Omega'}$ und $\overline{\Omega'' \Omega''}$ senkrechten Componenten der inneren Kräfte aller Stangen, welche in den Knotenpunkten m' und m'' zusammenlaufen.

$Z'_m \; Z''_m$ — die Componenten derselben Kräfte, senkrecht auf die Seitenfläche $\overline{\Omega' \Omega''}$.

Wir werden die bei dem Studium des prismatischen Pfeilers gebrauchten Bezeichnungen für das Trägheits-Moment, den Trägheits-Radius, die Biegungs-Momente und die abscheerenden Kräfte der Säulen, auch in diesem Falle anwenden, indem wir bemerken:

a) dass sich die Zeichen ohne Stern auf die Biegungen der Säulen beziehen, projicirt auf Ebenen, welche durch jene gehen und respective senkrecht sind:

1. auf die Seitenfläche $\overline{\Omega' \Omega'}$ für die Säule Ω';

2. auf die Seitenfläche $\overline{\Omega'' \Omega''}$ für die Säule Ω'';

b) dass die mit Stern versehenen Zeichen sich dagegen auf die Biegungen der Säulen beziehen, projicirt auf die durch jene gehenden Ebenen und beide senkrecht auf die Seitenfläche $\overline{\Omega' \Omega''}$.

Die Ausdrücke für die Beanspruchungen sind in der folgenden Uebersicht in Functionen der Verschiebungen, mit den bekannten Bedeutungen der Vorzeichen (Zug oder Druck), dargestellt:

$$[\Omega'_m] = [(\xi'_{m-1} - \xi'_m) \sin \varepsilon + (\eta'_{m-1} - \eta'_m) \cos \varepsilon + + (\zeta'_{m-1} - \zeta'_m) \sin \varepsilon^*] \frac{E_1 \Omega_m}{a_m} \cos \varepsilon_1$$

$$[\Omega''_m] = [(\xi''_{m-1} - \xi''_m) \sin \varepsilon + (\eta''_{m-1} - \eta''_m) \cos \varepsilon + + (\zeta''_{m-1} - \zeta''_m) \sin \varepsilon^*] \frac{E_1 \Omega_m}{a_m} \cos \varepsilon_1$$

$$[\omega'_m] = [(\zeta''_{m-1} - \zeta'_m) \cos \gamma_m \sin \varepsilon_2 + (\eta''_{m-1} - \eta'_m) \cos \gamma_m \cos \varepsilon_2 - - (\xi''_{m-1} + \xi'_m) \sin \gamma_m] \frac{E \omega_m}{a_m} \cos \gamma_m \cos \varepsilon_2$$

$$[\omega''_m] = [(\zeta'_{m-1} - \zeta''_m) \cos \gamma_m \sin \varepsilon_2 + (\eta'_{m-1} - \eta''_m) \cos \gamma_m \cos \varepsilon_2 - - (\xi'_{m-1} + \xi''_m) \sin \gamma_m] \frac{E \omega_m}{a_m} \cos \gamma_m \cos \varepsilon_2$$

(XXXI)

$$[\omega'_m]^* = [(\xi'_{m-1} - \xi'_m) \cos \gamma_m^* \sin \varepsilon_2^* + (\eta'_{m-1} - \eta'_m) \cos \gamma_m^* \cos \varepsilon_2^* - - (\zeta'_{m-1} + \zeta'_m) \sin \gamma_m^*] \frac{E \omega_m^*}{a_m} \cos \gamma_m^* \cos \varepsilon_2^*$$

$$[\omega''_m]^* = [(\xi''_{m-1} - \xi''_m) \cos \gamma_m^* \sin \varepsilon_2^* + (\eta''_{m-1} - \eta''_m) \cos \gamma_m^* \cos \varepsilon_2^* - - (\zeta''_{m-1} + \zeta''_m) \sin \gamma_m^*] \frac{E \omega_m^*}{a_m} \cos \gamma_m^* \cos \varepsilon_2^*$$

$$[\varrho_m] = (\xi'_m + \xi''_m) \frac{E \varrho_m}{b_m}$$

$$[\varrho'_m]^* = 2 \zeta'_m \frac{E \varrho_m^*}{b_m^*}$$

$$[\varrho''_m]^* = 2 \zeta''_m \frac{E \varrho_m^*}{b_m^*}$$

$$[\sigma_m] = [(\xi'_m + \xi''_m) \cos \delta + (\zeta'_m + \zeta''_m) \sin \delta] \frac{E \sigma_m}{b_m} \cos \delta = = [\ \ldots\ldots\ldots\ ] \frac{E \sigma_m}{b_m^*} \sin \delta.$$

Wir fügen noch einige Formeln an, welche die bestehenden Beziehungen zwischen den Winkelwerthen: γ_m, γ_m^*, ε, ε^*, ε_1, ε_2, ε_2^*, ϑ und den linearen Grössen: a_m, b_m, b_m^* betreffen:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos\varepsilon_2}{\cos\varepsilon^*} = \frac{\cos\varepsilon_2^*}{\cos\varepsilon}$$

$$\cos\varepsilon_1 = \cos\varepsilon\,\cos\varepsilon_2 = \cos\varepsilon^*\,\cos\varepsilon_2^*$$

$$\sin\varepsilon = \sin\varepsilon_2^*\,\cos\varepsilon^* \qquad \sin\varepsilon^* = \sin\varepsilon_2\,\cos\varepsilon$$

$$\sin(\gamma_m + \varepsilon) = \frac{\mathfrak{b}_m}{\mathfrak{a}_m}\cos\gamma_m\cos\varepsilon_1 \qquad \sin(\gamma_m^* + \varepsilon^*) = \frac{\mathfrak{b}_m^*}{\mathfrak{a}_m}\cos\gamma_m^*\cos\varepsilon_1$$

$$\sin(\gamma_m - \varepsilon) = \frac{\mathfrak{b}_{m-1}}{\mathfrak{a}_m}\cos\gamma_m\cos\varepsilon_1 \qquad \sin(\gamma_m^* - \varepsilon^*) = \frac{\mathfrak{b}_{m-1}^*}{\mathfrak{a}_m}\cos\gamma_m^*\cos\varepsilon_1$$

$$(\varepsilon) \qquad \operatorname{tang}\gamma_m = \frac{\mathfrak{b}_m + \mathfrak{b}_{m-1}}{2\mathfrak{a}_m}\cos\varepsilon_2 \qquad \operatorname{tang}\gamma_m^* = \frac{\mathfrak{b}_m^* + \mathfrak{b}_{m-1}^*}{2\mathfrak{a}_m}\cos\varepsilon_2^*$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\mathfrak{b}_m - \mathfrak{b}_{m-1}}{2\mathfrak{a}_m}\cos\varepsilon_2 \qquad \operatorname{tang}\varepsilon^* = \frac{\mathfrak{b}_m^* - \mathfrak{b}_{m-1}^*}{2\mathfrak{a}_m}\cos\varepsilon_2^*$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon_2 = \frac{\mathfrak{b}_m^* - \mathfrak{b}_{m-1}^*}{2\mathfrak{a}_m} \qquad \operatorname{tang}\varepsilon_2^* = \frac{\mathfrak{b}_m - \mathfrak{b}_{m-1}}{2\mathfrak{a}_m}$$

$$\operatorname{tang}\gamma_m\,\operatorname{tang}\varepsilon = \operatorname{tang}\gamma_m^*\,\operatorname{tang}\varepsilon^*.$$

§. XVII. Fundamental-Lehrsatz.

Wenn wir die äusseren Inanspruchnahmen trennen in:

A. Inanspruchnahme auf Zerknicken [P], hervorgerufen durch die symmetrischen Vertical-Belastungen 4P und $4p_m$.

B. Inanspruchnahme auf Umstürzen [Q], bestehend aus den horizontalen Kräften 4Q, $4q_m$ und dem Momente 2M, so können wir auch auf den pyramidenförmigen Pfeiler den im §. 17 vorgebrachten Fundamental-Lehrsatz und die Gesetze der Deformation und des Systemes der inneren Kräfte anwenden, mit Ausnahme von einigen geometrischen Eigenschaften der deformirten Säulenachsen, welche von der Neigung der letzteren abhängig sind.

Deformation.

I. Die Inanspruchnahme [P] deformirt die Säulen nach symmetrisch gegen die Pfeilerachse liegenden Curven:

a) gleich, symmetrisch und symmetrisch liegend, für die beiden anliegenden Säulen;

b) gleich und congruent für die beiden diagonal liegenden Säulen.

Die vier Seitenflächen des Pfeilers deformiren sich nach gegen Aussen convexen Cylinderflächen, von denen die paarweise gegenüber liegenden symmetrisch sind, und die Diagonal-Ebenen nach Regelflächen, welche sich in der Pfeilerachse schneiden.

II. Die Inanspruchnahme [Q] deformirt die Säulen nach Curven, welche paarweise gleich und symmetrisch oder gleich und congruent sind:

a) gleich, symmetrisch

1. und symmetrisch gelegen sind die Paare $\Omega'\Omega'$, $\Omega''\Omega''$;

2. und antisymmetrisch gelegen sind die Paare $\Omega'\Omega''$, welche auf derselben Seitenfläche liegen;

b) gleich und congruent sind die diagonal liegenden Paare $\Omega'\Omega''$.

Die auf die Ebene der Inanspruchnahme senkrechten Seitenflächen und die Diagonal-Ebenen deformiren sich nach vier cylindrischen Flächen, welche die Deformation des Pfeilers vollständig bestimmen, indem die fünf Schnittcurven die deformirten Achsen der Säulen und des Pfeilers darstellen.

Die zur Inanspruchnahme parallelen Seitenflächen deformiren sich nach Regelflächen.

Die deformirten Achsen der vier Seitenflächen (geometrische Orte der Mittelpunkte der horizontalen Stangen) und die deformirte Achse des Pfeilers sind ebene Curven.

Wir fügen noch einige Bemerkungen bezüglich dieser Gesetze der Deformation hinzu.

Die Achsen eines diagonalen Säulenpaares deformiren sich nach congruenten Curven sowohl in Folge von [P] als auch [Q], aber dann nicht, wenn beide gleichzeitig wirken. In der That sind die von [P] hervorgebrachten Verschiebungen zweier correspondirender Knotenpunkte an Werth und Zeichen gleich, dagegen die von [Q] erzeugten Verschiebungen an Werth gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen.

Die beiden Inanspruchnahmen [Q] und [Q]*, welche gleichzeitig, parallel zu den beiden Symmetrie-Ebenen des Pfeilers wirken, deformiren dagegen die diagonal liegenden Säulen nach congruenten Curven; dieselbe

Eigenschaft gilt auch für irgend eine Horizontalkraft, welche im Centrum des Pfeilerkopfes angreift.

Innere Kräfte.

Die Gesetze für das System der inneren Kräfte sind mit jenen des prismatischen Pfeilers identisch; wir fassen dieselben folgend zusammen:

I. Die Inanspruchnahme [P] erzeugt:

a) gleiche Drücke in allen homologen Paaren der geneigten Glieder;

b) gleiche Züge in zwei homologen inneren Diagonalen und in zwei homologen Paaren der äusseren horizontalen Stangen.

II. Die Inanspruchnahme [Q] erzeugt:

a) innere, gleiche und entgegengesetzte Kräfte in den homologen, auf die Inanspruchnahme senkrechten Gliedern der beiden Seitenflächen, welche als einfache Pfeiler auf Zerknicken respective Zerreissen beansprucht sind;

b) keine inneren Kräfte in den inneren Diagonalen und horizontalen Stangen der Seitenflächen, welche parallel zur Inanspruchnahme sind, und als einfache Pfeiler auf Umstürzen beansprucht werden.

Der Beweis für den Fundamental-Lehrsatz und für alle daraus folgenden Gesetze ergibt sich aus der analytischen Behandlung, welche wir jetzt geben werden.

§. XVIII. Bezeichnungen.

Wir werden die bei dem Studium des prismatischen Pfeilers gebrauchten Bezeichnungen (32) identisch anwenden und unterlassen der Kürze wegen die neuerliche Aufschreibung derselben, indem wir uns nur erinnern, dass auf Grund des Fundamental-Lehrsatzes die Bezeichnungen mit den Zeigern p und q eine doppelte Bedeutung erhalten.

Als Verallgemeinerung der Bezeichnungen (33) fügen wir eine Uebersicht der Bezeichungen bezüglich der reducirten Querschnitte hier bei:

$$O_m = E^1 \Omega_m \cos^3 \varepsilon_1$$

$$\mathrm{r}_m = E \varrho_m \left(\frac{\mathrm{a}_m}{\mathrm{b}_m}\right)^3 \qquad \mathrm{o}_m = E \omega_m \cos^3 \gamma_m \cos^3 \varepsilon_2$$

$$\mathrm{s}_m = E \sigma_m \left(\frac{\mathrm{a}_m}{\mathrm{b}_m}\right)^3 \cos^3 \delta = E \sigma_m \left(\frac{\mathrm{a}_m}{\mathrm{b}_m^*}\right)^3 \sin^3 \delta$$

$$\mathrm{r}_m^* = E \varrho_m^* \left(\frac{\mathrm{a}_m}{\mathrm{b}_m^*}\right)^3 \qquad \mathrm{o}_m^* = E \omega_m^* \cos^3 \gamma_m^* \cos^3 \varepsilon_2^*$$

$$\text{(xxxiii)} \quad \begin{cases} W_m = \dfrac{\mathrm{o}_m}{O_m + \mathrm{o}_m + \mathrm{o}_m^*} & U_m = \dfrac{O_m \, \mathrm{o}_m}{O_m + \mathrm{o}_m + \mathrm{o}_m^*} \\[2ex] W_m^* = \dfrac{\mathrm{o}_m^*}{O_m + \mathrm{o}_m + \mathrm{o}_m^*} & U_m^* = \dfrac{O_m \, \mathrm{o}_m^*}{O_m + \mathrm{o}_m + \mathrm{o}_m^*} \end{cases}$$

$$V_m = \frac{\mathrm{o}_m \, \mathrm{o}_m^*}{O_m + \mathrm{o}_m + \mathrm{o}_m^*}$$

$$\mathrm{w}_m^* = \frac{\mathrm{o}_m^*}{O_m + \mathrm{o}_m^*} \qquad \mathrm{u}_m^* = \frac{O_m \, \mathrm{o}_m^*}{O_m + \mathrm{o}_m^*}.$$

II. Capitel.

Bestimmung der halben Summen ξ_{mp} η_{mp} ζ_{mp} etc.

(Componenten der Inanspruchnahme [P].)

§. XIX. Gleichgewichts-Gleichungen.

Für das verticale Gleichgewicht des oberhalb dem m^{ten} Felde befindlichen Pfeilertheiles hat man:

$$([\Omega'_m] + [\Omega''_m]) \cos \varepsilon_1 + ([\omega'_m] + [\omega''_m]) \cos \gamma_m \cos \varepsilon_2 +$$
$$+ ([\omega'_m]^* + [\omega''_m]^*) \cos \gamma_m^* \cos \varepsilon_2^* = 2P + 2\sum_1^{m-1} p_i + p_m = 2P_m.$$

Wenn man diese Gleichung[1]) mittelst (XXXI) transformirt, $m = 1$ bis $m = n$ setzt, die Gleichungen (ε) und (XXXIII) in Rechnung zieht, so erhält man ein System von der allgemeinen Form:

---

[1]) In der ganzen Abhandlung werden wir zur Abkürzung nur die allgemeinen Gleichungen jener Systeme geben, deren Gleichungen die Verschiebungen enthalten.

$$\eta_{m-1p} - \eta_{mp} = \frac{P_m a_m}{o_m + O_m + o_m^*} +$$

$$\text{(XXXIV)} \quad \begin{aligned} &+ \left(\frac{b_m W_m}{a_m} - \text{tang}\, \varepsilon_2^*\right) \xi_{m-1p} + \left(\frac{b_{m-1} W_m}{a_m} + \text{tang}\, \varepsilon_2^*\right) \xi_{mp} + \\ &+ \left(\frac{b_m^* W_m^*}{a_m} - \text{tang}\, \varepsilon_2\right) \zeta_{m-1p} + \left(\frac{b_{m-1}^* W_m^*}{a_m} + \text{tang}\, \varepsilon_2\right) \zeta_{mp}. \end{aligned}$$

Projicirt man die inneren Kräfte der Stangen, welche in m' zusammenlaufen, auf die zur Seitenfläche $\overline{\Omega' \Omega'}$ normale Richtung, und die inneren Kräfte der Stangen, welche in m'' zusammenlaufen, auf die zur Seitenfläche $\overline{\Omega'' \Omega''}$ normale Richtung, so erhält man:

$$\text{(XXXV)} \quad \begin{aligned} X'_m &= \Big([\omega'_m] \sin(\gamma_m - \varepsilon) + [\omega''_{m+1}] \sin(\gamma_{m+1} + \varepsilon)\Big) \cos \vartheta - \\ &\qquad - ([\varrho_m] + [\sigma_m] \cos \delta) \cos \varepsilon_2^* \\ X''_m &= \Big([\omega''_m] \sin(\gamma_m - \varepsilon) + [\omega'_{m+1}] \sin(\gamma_{m+1} + \varepsilon)\Big) \cos \vartheta - \\ &\qquad - ([\varrho_m] + [\sigma_m] \cos \delta) \cos \varepsilon_2^* \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich, wenn man gleicher Weise die inneren Kräfte derselben Stangen auf die zur Seitenfläche $\overline{\Omega' \Omega''}$ normale Richtung projicirt:

$$\text{(XXXVI)} \quad \begin{aligned} Z'_m &= \Big([\omega'_m]^* \sin(\gamma_m^* - \varepsilon^*) + [\omega'_{m+1}]^* \sin(\gamma_{m+1}^* + \varepsilon^*)\Big) \cos \vartheta - \\ &\qquad - ([\varrho'_m]^* + [\sigma_m] \sin \delta) \cos \varepsilon_2 \\ Z''_m &= \Big([\omega''_m]^* \sin(\gamma_m^* - \varepsilon^*) + [\omega''_{m+1}]^* \sin(\gamma_{m+1}^* + \varepsilon^*)\Big) \cos \vartheta - \\ &\qquad - ([\varrho''_m]^* + [\sigma_m] \sin \delta) \cos \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Nach Summirung der beiden Gleichungen (XXXV) unter sich und der beiden (XXXVI) transformiren wir dieselben mittelst (XXXI) und eliminiren aus den beiden so erhaltenen Gleichungen mittelst (XXXIV) die Differenzen:

$$\eta_{m-1p} - \eta_{mp}, \quad \eta_{mp} - \eta_{m+1p}.$$

Dividirt man sodann dieselben durch $\cos \varepsilon_2^*$ und $\cos \varepsilon_2$ respective, so erhält man nach einigen auf Grund von (ε) durchgeführten Reducirungen und mit Berücksichtigung von (XXXIII):

$$\frac{X_{mp}}{\cos\ \varepsilon_2^*} = \frac{b_{m-1} W_m}{a_m} P_m + \frac{b_{m+1} W_{m+1}}{a_{m+1}} P_{m+1} -$$

$$- \frac{b_{m-1} b_m}{a^3_m} (U_m + V_m)\, \xi_{m-1p} -$$

$$- \left(\frac{b^2_{m-1}}{a^3_m} (U_m + V_m) + \frac{2 b^2_m}{a^3_m} (r_m + s_m) + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2_{m+1}}{a^2_{m+1}} (U_{m+1} + V_{m+1}) \right) \xi_{mp} -$$

(XXXVII)

$$- \frac{b_m b_{m+1}}{a^3_{m+1}} (U_{m+1} + V_{m+1})\, \xi_{m+1p} +$$

$$+ \frac{b_{m-1} b_m^*}{a^3_m} V_m\, \xi_{m-1p} +$$

$$+ \left(\frac{b_{m-1} b_{m-1}^*}{a^3_m} V_m - \frac{2 b_m b_m^*}{a^3_m} s_m + \frac{b_{m+1} b_{m+1}^*}{a^3_{m+1}} V_{m+1} \right) \xi_{mp} +$$

$$+ \frac{b_m^* b_{m+1}}{a^3_{m+1}} V_{m+1}\, \xi_{m+1p}.$$

$$\frac{Z_{mp}}{\cos\ \varepsilon_2} = \frac{b_{m-1}^* W_m^*}{a_m} P_m + \frac{b_{m+1}^* W_{m+1}^*}{a_{m+1}} P_{m+1} -$$

$$- \frac{b_{m-1}^* b_m^*}{a^3_m} (U_m^* + V_m)\, \xi_{m-1p} -$$

$$- \left(\frac{b_{m-1}^{*2}}{a^3_m} (U_m^* + V_m) + \frac{2 b_m^{*2}}{a^3_m} (r_m^* + s_m) + \right.$$

$$\left. + \frac{b_{m+1}^{*2}}{a^3_{m+1}} (U_{m+1}^* + V_{m+1}) \right) \xi_{mp} -$$

(XXXVIII)

$$- \frac{b_m^* b_{m+1}^*}{a^3_{m+1}} (U_{m+1}^* + V_{m+1})\, \xi_{m+1p} +$$

$$+ \frac{b_{m-1}^* b_m}{a^3_m} V_m\, \xi_{m-1p} +$$

$$+ \left(\frac{b_{m-1}^* b_{m-1}}{a^3_m} V_m - \frac{2 b_m^* b_m}{a^3_m} s_m + \frac{b_{m+1}^* b_{m+1}}{a^3_{m+1}} V_{m+1} \right) \xi_{mp} +$$

$$+ \frac{b_m b_{m+1}^*}{a^3_{m+1}} V_{m+1}\, \xi_{m+1p}.$$

Diese Formeln zeigen in doppelter Weise eine Analogie sowohl mit (VII) als auch mit (37) und (38), für welche dieselben die strenge Verallgemeinerung sind.

§. XX. Lösung der Aufgabe, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet.

Bei dieser Annahme führen die Gleichgewichts-Bedingungen der Knotenpunkte m' und m'' für die zu den Seitenflächen des Pfeilers senkrechten Richtungen zu den Gleichungen:

$$X'_m = \frac{1}{2}(p_m + p_{m+1}) \sin \varepsilon_2{}^* + q_m \cos \varepsilon_2{}^* \qquad Z'_m = \frac{1}{2}(p_m + p_{m+1}) \sin \varepsilon_2$$

$$X''_m = \frac{1}{2}(p_m + p_{m+1}) \sin \varepsilon_2{}^* - q_m \cos \varepsilon_2{}^* \qquad Z''_m = \frac{1}{2}(p_m + p_{m+1}) \sin \varepsilon_2.$$

Wenn man die beiden ersten und die beiden zweiten summirt, und die resultirenden Gleichungen durch $\cos \varepsilon_2{}^*$ und $\cos \varepsilon_2$ respective dividirt, so erhält man:

$$\frac{X_{mp}}{\cos \varepsilon_2{}^*} = \frac{1}{2}(p_m + p_{m+1}) \operatorname{tang} \varepsilon_2{}^* \qquad \frac{Z_{mp}}{\cos \varepsilon_2} = \frac{1}{2}(p_m + p_{m+1}) \operatorname{tang} \varepsilon_2.$$

Die für $m = 1$ bis $m = n$ anwendbaren (XXXVII) und (XXXVIII) bilden daher zwei Systeme, jedes mit $n - 1$ Gleichungen zwischen den ξ_p und ζ_p von der allgemeinen Form:

$$\text{(XXXIX)} \quad \mathfrak{A}_{m1}\, \xi_{m-1p} + \mathfrak{A}_{m2}\, \xi_{mp} + \mathfrak{A}_{m3}\, \xi_{m+1p} - \mathfrak{B}_{m1}\, \zeta_{m-1p} - \mathfrak{B}_{m2}\, \zeta_{mp} - \mathfrak{B}_{m3}\, \zeta_{m+1p} =$$
$$= \frac{b_{m-1} W_m}{a_m} P_m + \frac{b_{m+1} W_{m+1}}{a_{m+1}} P_{m+1} - \frac{1}{2}(p_m + p_{m+1}) \operatorname{tang} \varepsilon_2{}^*.$$

$$\text{(XL)} \quad \mathfrak{A}_{m1}{}^*\, \zeta_{m-1p} + \mathfrak{A}_{m2}{}^*\, \zeta_{mp} + \mathfrak{A}_{m3}{}^*\, \zeta_{m+1p} - \mathfrak{B}_{m1}{}^*\, \xi_{m-1p} - \mathfrak{B}_{m2}{}^*\, \xi_{mp} - \mathfrak{B}_{m3}{}^*\, \xi_{m+1p} =$$
$$= \frac{b_{m-1}{}^* W_m{}^*}{a_m} P_m + \frac{b_{m+1}{}^* W_{m+1}{}^*}{a_{m+1}} P_{m+1} - \frac{1}{2}(p_m + p_{m+1}) \operatorname{tang} \varepsilon_2.$$

Wir erinnern uns, dass für die End-Knotenpunkte:

$$\xi_{0p} = \xi_{np} = \zeta_{0p} = \zeta_{np} = 0.$$

Die beiden vorigen Systeme vereinfachen sich bedeutend, wenn man die Winkel γ und γ^* constant angenommen, auch die Querschnitte der Stangen in den verschiedenen Feldern als constant annimmt. Bei dieser Voraussetzung sind auch die Werthe: W, W*, U, U*, V, r, r*, s für alle Felder constant; setzt man:

$$e = \frac{a_m}{a_{m+1}} = \frac{b_m}{b_{m+1}} = \frac{b_m^*}{b_{m+1}^*},$$

so reduciren sich die allgemeinen Gleichungen, wenn man die Zeiger bei den constanten Grössen weglässt, auf die Form:

$$\text{(XXXIX')} \quad \begin{aligned} & e(U+V) b_m \xi_{m-1p} + [(e+e^2)(U+V) + 2(r+s)] b_m \xi_{mp} + \\ & + e^2 (U+V) b_m \xi_{m+1p} - e V b_m^* \zeta_{m-1p} - [(e+e^2) V - 2s] b_m^* \zeta_{mp} - \\ & - e^2 V b_m^* \zeta_{m+1p} = a^2_m \left(W \, (e P_m + P_{m+1}) - \frac{1-e}{4} (p_m + p_{m+1}) \right) \end{aligned}$$

$$\text{(XL')} \quad \begin{aligned} & e(U^*+V) b_m^* \zeta_{m-1p} + [(e+e^2)(U^*+V) + 2(r^*+s)] b_m^* \zeta_{mp} + \\ & + e^2 (U^*+V) b_m^* \zeta_{m+1p} - e V b_m \xi_{m-1p} - [(e+e^2) V - 2s] b_m \xi_{mp} - \\ & - e^2 V b_m \xi_{m+1p} = a^2_m \left(W^* (e P_m + P_{m+1}) - \frac{1-e}{4} (p_m + p_{m+1}) \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind analog mit (39) und (40).

Wenn der Pfeiler von quadratischem Grundrisse und vollkommen symmetrisch ist, hat man:

$$b = b^*, \quad \omega = \omega^*, \quad \varrho = \varrho^*,$$

und die beiden obigen Systeme fallen, wenn man die Sterne weglässt und $\xi_p = \zeta_p$ setzt, in ein einziges System von der allgemeinen Form zusammen:

$$\begin{aligned} & e U \xi_{m-1p} + [(e+e^2) U + 2(r+2s)] \xi_{mp} + e^2 U \xi_{m+1p} = \\ & = \frac{a^2_m}{b_m} \left(W \, (e P_m + P_{m+1}) - \frac{1-e}{4} (p_m + p_{m+1}) \right), \end{aligned}$$

welches sich von dem Systeme (VIII') des einfachen Pfeilers nur durch die Substituirung der am Ende des §. 20 angegebenen Coëfficienten unterscheidet.

Dasselbe kann man auch von den allgemeinen Systemen (XXXIX) und (XL) sagen, welche für einen quadratischen und in allen seinen Theilen symmetrischen Pfeiler in ein mit (VIII) analoges System zusammenfallen.

§. XXI. Die Continuität der Säulen und ihre Befestigung an den Enden in Rechnung gezogen.

Wenn man die Höhe der Felder als gleich und die Trägheits-Momente I I* der Säulen als constant voraussetzt (folglich auch den

Querschnitt Ω und den reducirten Querschnitt O), so wird die Aufgabe der Bestimmung von ξ_p und ζ_p analog wie in den vorhergehenden Fällen durch Anwendung von (o) für das Studium der Biegung der Säulen gelöst, indem man dieselben auf durch jene gehende und auf den Seitenflächen normal stehende Ebenen projicirt.

Wir nehmen wieder an, dass der Winkel ε_1 so klein sei, dass man den Einfluss der Vertical-Verschiebungen auf die Höhenunterschiede[1]) vernachlässigen kann.

Transformiren wir das System (o), indem wir in demselben setzen:

$$E = E_1 \quad l = \frac{a}{\cos \varepsilon_1} \quad x_n = t_n = 0$$

und ferner:

α) für die Biegung der Säulen, normal zu den Seitenflächen $\overline{\Omega' \Omega'}$ und $\overline{\Omega'' \Omega''}$:

$$I = \Omega i^2 \quad q = p \sin \varepsilon_2^*$$

für die Säule Ω':

$$X_m = X'_m \quad x_m = - \xi'_m \cos \varepsilon_2^*,$$

für die Säule Ω'':

$$X_m = X''_m \quad x_m = - \xi''_m \cos \varepsilon_2^*;$$

β) für die Biegung der Säulen, normal zu den Seitenflächen $\overline{\Omega' \Omega''}$:

$$I = I^* \Omega i^{*2} \quad q = p \sin \varepsilon_2 \quad x_0 = t_0 = 0,$$

für die Säule Ω':

$$X_m = Z'_m \quad x_m = - \zeta'_m \cos \varepsilon_2,$$

für die Säule Ω'':

$$X_m = Z''_m \quad x_m = - \zeta''_m \cos \varepsilon_2.$$

---

[1]) Auf diese Art sind die Glieder mit $i^2 \tang \varepsilon_2^*$ und $i^{*2} \tang \varepsilon_2$ in Bezug auf die Ausdrücke mit b_m^2 und b_m^{*2} vernachlässigt.

Die strenge Durchführung der Aufgabe, mit Anwendung der Ausdrücke:

$$x_m = \eta'_m \sin \varepsilon_2^* - \xi'_m \cos \varepsilon_2^*$$

. . . .

ist nur wegen der Weitläufigkeit der Formeln mühsam. Die derart in (XLI) und (XLII) eingeführten Ausdrücke mit η_p können mittelst (XXXIV) eliminirt werden.

Summirt man paarweise die beiden so erhaltenen Systeme von Gleichungen und beachtet, dass: $\frac{4pa}{\cos\varepsilon_1} = 4p_0 =$ dem (constanten) Eigengewichte eines Feldes, so erhält man zwei Systeme von Gleichungen, welche, durch $\cos\varepsilon_2{}^*$ und $\cos\varepsilon_2$ respective dividirt, die allgemeine Form annehmen:

$$\text{(XLI)}\quad \frac{X_{m-1p}}{\cos\varepsilon_2{}^*} + \frac{4X_{mp}}{\cos\varepsilon_2{}^*} + \frac{X_{m+1p}}{\cos\varepsilon_2{}^*} =$$

$$= \frac{6\,O\,i^2}{a^3}(\xi_{m-2p} - 4\xi_{m-1p} + 6\xi_{mp} - 4\xi_{m+1p} + \xi_{m+2p}) + 6p_0 \operatorname{tang}\varepsilon_2{}^*$$

$$\text{(XLII)}\quad \frac{Z_{m-1p}}{\cos\varepsilon_2} + \frac{4Z_{mp}}{\cos\varepsilon_2} + \frac{Z_{m+1p}}{\cos\varepsilon_2} =$$

$$= \frac{6\,O\,i^{*2}}{a^3}(\zeta_{m-2p} - 4\zeta_{m-1p} + 6\zeta_{mp} - 4\zeta_{m+1p} + \zeta_{m+2p}) + 6p_0 \operatorname{tang}\varepsilon_2.$$

Eliminirt man die Ausdrücke der ersten Glieder dieser Gleichungen mittelst (XXXVII) und (XXXVIII), und setzt nach Weglassung der Zeiger bei a:

$$P_m = P + \left(m - \frac{1}{2}\right)p_0,$$

so erhält man die allgemeinen Gleichungen der Systeme, welche die ξ_p und ζ_p in folgender Form ergeben:

$$\text{(XLIII)}\quad A_{m1}\xi_{m-2p} + A_{m2}\xi_{m-1p} + A_{m3}\xi_{mp} + A_{m4}\xi_{m+1p} + A_{m5}\xi_{m+2p} -$$
$$- B_{m1}\zeta_{m-2p} - B_{m2}\zeta_{m-1p} - B_{m3}\zeta_{mp} - B_{m4}\zeta_{m+1p} - B_{m5}\zeta_{m+2p} =$$
$$= (C_{m1}P + C_{m2}p_0)a^2.$$

$$\text{(XLIV)}\quad A_{m1}{}^*\zeta_{m-2p} + A_{m2}{}^*\zeta_{m-1p} + A_{m3}{}^*\zeta_{mp} + A_{m4}{}^*\zeta_{m+1p} + A_{m5}{}^*\zeta_{m+2p} -$$
$$- B_{m1}{}^*\xi_{m-2p} - B_{m2}{}^*\xi_{m-1p} - B_{m3}{}^*\xi_{mp} - B_{m4}{}^*\xi_{m+1p} - B_{m5}{}^*\xi_{m+2p} =$$
$$= (C_{m1}{}^*P + C_{m2}{}^*p_0)a^2.$$

In diesen Systemen sind die Coëfficienten A und A* analoge Grössen mit den in (XI) bestimmten Coëfficienten *a* und können aus denselben erhalten werden, indem man wechselt:

$$u_m \text{ in : } U_m + V_m \text{ oder in : } U_m{}^* + V_m$$
$$r_m \text{ in : } r_m + s_m \text{ oder in : } r_m{}^* + s_m.$$

Man hat daher beispielsweise:

(XLV)

$$A_{m3} = b_{m-1}(4b_{m-1} + b_m)(U_m + V_m) + \\ + b_{m+1}(b_m + 4b_{m+1})(U_{m+1} + V_{m+1}) + 8b^2_m(r_m + s_m) + 36\,O\,i^2$$

$$A_{m3}^* = b_{m-1}^*(4b_{m-1}^* + b_m^*)(U_m^* + V_m) + \\ + b_{m+1}^*(b_m^* + 4b_{m+1}^*)(U_{m+1}^* + V_{m+1}) + 8b_m^{*2}(r_m^* + s_m) + 36\,O\,i^{*2}.$$

Die Coëfficienten B und B* zeigen eine gewisse Analogie mit A und A* und sind:

(XLV′)

$$B_{m1} = b_{m-1}^*\, b_{m-2}\, V_{m-1}$$

$$B_{m2} = b_{m-2}^*\, b_{m-2}\, V_{m-1} + b_m^*(4b_{m-1} + b_m)V_m - \\ - 2b_{m-1}^*\, b_{m-1}\, s_{m-1}$$

$$B_{m3} = b_{m-1}^*(4b_{m-1} + b_m)V_m + b_{m+1}^*(b_m + 4b_{m+1})V_{m+1} - \\ - 8b_m^*\, b_m\, s_m$$

$$B_{m4} = b_m^*(b_m + 4b_{m+1})V_{m+1} + b_{m+2}^*\, b_{m+2}\, V_{m+2} - \\ - 2b_{m+1}^*\, b_{m+1}\, s_{m+1}$$

$$B_{m5} = b_{m+1}^*\, b_{m+2}\, V_{m+2}$$

$$B_{m1}^* = b_{m-1}\, b_{m-2}^*\, V_{m-1}$$

$$B_{m2}^* = b_{m-2}\, b_{m-2}^*\, V_{m-1} + b_m(4b_{m-1}^* + b_m^*)V_m - \\ - 2b_{m-1}\, b_{m-1}^*\, s_{m-1}.$$

. . . .

Die Coëfficienten C und C* sind mit den in (XI) bestimmten Coëfficienten c analoge Grössen, und können erhalten werden, indem in jenen für w, W oder W* und für ε, ε_2^* oder ε_2 setzt:

(XLV″)

$$C_{m1} = b_{m-2}W_{m-1} + (4b_{m-1} + b_m)W_m + (b_m + 4b_{m+1})W_{m+1} + \\ + b_{m+2}W_{m+2}$$

$$C_{m2} = (m - \tfrac{3}{2})\,b_{m-2}W_{m-1} + (m - \tfrac{1}{2})(4b_{m-1} + b_m)W_m + \\ + (m + \tfrac{3}{2})\,b_{m+2}W_{m+2} + (m + \tfrac{1}{2})(b_m + 4b_{m+1})W_{m+1} - \\ - 12\,a\,\mathrm{tang}\,\varepsilon_2^*$$

$$C_{m1}^* = b_{m-2}^*\, W_{m-1}^* + \ldots\ldots\ \text{etc.}$$

$$C_{m2}^* = (m - \tfrac{3}{2})\,b_{m-2}^*\, W_{m-1}^* + \ldots\ \text{etc.} \ldots\ldots - 12\,a\,\mathrm{tang}\,\varepsilon_2.$$

Die Coëfficienten der Endgleichungen der Systeme (XLIII), (XLIV) können ohne Schwierigkeit durch Analogie aus (XI) gefunden werden.

Wenn der Pfeiler von quadratischem Grundrisse und vollkommen symmetrisch ist, fallen die beiden erhaltenen Systeme nach Hinweglassung der Sterne in ein einziges zusammen, wobei die Coëfficienten der $\mathbf{V}$ verschwinden, von der Form:

$$\mathfrak{A}_{m1}\xi_{m-2p} + \mathfrak{A}_{m2}\xi_{m-1p} + \mathfrak{A}_{m3}\xi_{mp} + \mathfrak{A}_{m4}\xi_{m+1p} + \mathfrak{A}_{m5}\xi_{m+2p} = \\ = (\mathfrak{C}_{m1}\,\mathrm{P} + \mathfrak{C}_{m2}\,p_0)\,\mathrm{a}^2.$$

Die Coëfficienten dieses Systemes unterscheiden sich von jenen (XI) nur dadurch, dass: U_m, W_m, $\mathrm{r}_m + 2\,\mathrm{s}_m$, ε_2 statt u_m, w_m, r_m, ε substituirt ist:

Halbe Summen μ_{mp} und μ_{mp}^*.

Wenn man für das Studium der Biegung der Säulenachsen, welche auf die durch dieselben gehenden und auf den Seitenflächen normalen Ebenen projicirt sind, die (N) mit den in den Systemen (XLI), (XLII) gebrauchten Transformationen anwendet, indem man jedes Paar von Gleichungen summirt, die beiden resultirenden Gleichungen respective mit $\cos\varepsilon^*$ und $\cos\varepsilon$ multiplicirt, und (ε) in Rechnung zieht, so ergibt sich:

$$\text{(XLVI)} \quad \begin{aligned} \mu_{mp} \cos\varepsilon^* &= \frac{\mathrm{a}}{6} \cdot \frac{\mathrm{X}_{mp}}{\cos\varepsilon_2^*} - \mathrm{O}\,\frac{\mathrm{i}^2}{\mathrm{a}^2}\,(\xi_{m-1p} - 2\,\xi_{mp} + \xi_{m+1p}) \\ \mu_{mp}^* \cos\varepsilon &= \frac{\mathrm{a}}{6} \cdot \frac{\mathrm{Z}_{mp}}{\cos\varepsilon_2} - \mathrm{O}\,\frac{\mathrm{i}^{*2}}{\mathrm{a}^2}\,(\zeta_{m-1p} - 2\,\zeta_{mp} + \zeta_{m+1p}). \end{aligned}$$

Für die fest eingespannten Querschnitte hat man dagegen:

$$\text{(XLVI')} \quad \begin{aligned} \mu_{0p} \cos\varepsilon^* &= -\frac{\mathrm{a}}{12} \cdot \frac{\mathrm{X}_{1p}}{\cos\varepsilon_2^*} - \mathrm{O}\,\frac{\mathrm{i}^2}{\mathrm{a}^2}\,(5\,\xi_{1p} - \xi_{2p}) \\ \mu_{0p}^* \cos\varepsilon &= -\frac{\mathrm{a}}{12} \cdot \frac{\mathrm{Z}_{1p}}{\cos\varepsilon_2} - \mathrm{O}\,\frac{\mathrm{i}^{*2}}{\mathrm{a}^2}\,(5\,\zeta_{1p} - \zeta_{2p}) \end{aligned}$$

und analog könnte man construiren: $\mu_{np} \cos\varepsilon^*$ und $\mu_{np}^* \cos\varepsilon$.

Die bis jetzt durchgeführte Untersuchung liefert den strengen Beweis für die Richtigkeit des Fundamental-Lehrsatzes[1]).

---

[1]) Die Annahme der gleichen Höhe der Felder, mit welcher die Aufgabe im letzten Theile der Untersuchung durchgeführt wurde, beschränkt nicht die Richtigkeit des Lehrsatzes; bei dieser Gelegenheit verweisen wir auf die in der Anmerkung §. VI gemachten Bemerkungen.

§. XXII. Explicite, angenäherte Lösung.

Die Ungleichheit der geometrischen Elemente in den verschiedenen Feldern macht es unmöglich, für die horizontalen Verschiebungen Ausdrücke aufzustellen, welche den allgemeinen Gleichungen (XXXIX), (XL) oder (XLIII), (XLIV) genügen.

Dagegen bestehen für die besagten Verschiebungen Ausdrücke, welche den allgemeinen Gleichungen (XXXIX′) und (XL′) in Bezug auf einen Pfeiler mit ähnlichen Feldern genügen, und zwar für die Belastungen P in strenger Weise, dagegen für das Eigengewicht, welches in den aufeinander folgenden Feldern verschieden ist, nur angenähert. Setzt man:

$$H_{(e)} = (e + e^2)(U + V) + r + s \qquad H_{(e)}^* = (e + e^2)(U^* + V) + r^* + s$$

$$K_{(e)} = s - (e + e^2)\,V$$

$$\text{(XLVII)} \qquad \Psi_{(e)} = \frac{W H_{(e)}^* - W^* K_{(e)}}{H_{(e)} H_{(e)}^* - K_{(e)}^2} \qquad \Psi_{(e)}^* = \frac{W^* H_{(e)} - W K_{(e)}}{H_{(e)} H_{(e)}^* - K_{(e)}^2}$$

und vernachlässigt das Eigengewicht, so sind diese Ausdrücke:

$$\text{(XLVIII)} \qquad \begin{aligned} \xi_{mp} &= \Psi_{(e)} \frac{a^2_m}{b_m} \cdot \frac{1 + e}{2} P \\ \zeta_{mp} &= \Psi_{(e)}^* \frac{a^2_m}{b_m^*} \cdot \frac{1 + e}{2} P. \end{aligned}$$

In Bezug auf den Grad der Annäherung dieser Lösung (XLVIII) erinnern wir an die im analogen Falle schon gemachten Bemerkungen.

Die vorstehenden Ausdrücke zeigen, dass die horizontalen Verschiebungen der m^{ten} Knotenpunkte, durch die verticalen Belastungen P hervorgerufen, den a_m proportional sind, und ferner, dass

$$\frac{\xi_{mp}}{\zeta_{mp}} = \frac{\Psi_{(e)}}{\Psi_{(e)}^*} \operatorname{tang} \delta = \text{Constante}.$$

Für einen Pfeiler mit ähnlichen Feldern, bei welchen sich die äusseren Knotenpunkte unter denselben Umständen wie die mittleren verschieben können, lässt sich daher folgender Satz aufstellen: In Folge der Belastungen P verschieben sich die Säulen, indem sie sich um die Spitze der Pyramide drehen, wobei selbe geradlinig bleiben.

Dieses Gesetz gibt die vollkommene Verallgemeinerung aller für specielle Fälle aufgestellten Gesetze, welche den Gegenstand der früheren Untersuchungen bildeten. Dieses angenäherte Gesetz für die Deformation kann man für die mittleren Theile der Säulen beibehalten, wo die durch die Befestigung der äusseren Knotenpunkte hervorgebrachte Störung weniger fühlbar ist.

Die Gleichungen (XLVIII) und (XXXI) mit (XXXIV), bei Berücksichtigung der allgemeinen Bezeichnungen (32) und der Gleichungen (ε), ergeben für die inneren Kräfte, welche, von den Belastungen P hervorgerufen, für alle Felder constant resultiren, die folgenden Ausdrücke:

$$(\text{XLIX})\quad \begin{aligned}
[\Omega]_p &= [1 - \Psi_{(e)}\,r - \Psi_{(e)}^*\,r^* - 2\,(\Psi_{(e)} + \Psi_{(e)}^*)\,s]\,\frac{P}{\cos\varepsilon_1}\\
[\omega]_p &= [\Psi_{(e)}\,r + (\Psi_{(e)} + \Psi_{(e)}^*)\,s]\,\frac{P}{\cos\gamma\,\cos\varepsilon_2}\\
[\omega]_p^* &= [\Psi_{(e)}^*\,r^* + (\Psi_{(e)} + \Psi_{(e)}^*)\,s]\,\frac{P}{\cos\gamma^*\,\cos\varepsilon_2^*}\\
[\varrho]_p &= \Psi_{(e)}\,r\,\frac{2P}{\cot\gamma\,\cos\varepsilon_2}\\
[\varrho]_p^* &= \Psi_{(e)}^*\,r^*\,\frac{2P}{\cot\gamma^*\,\cos\varepsilon_2^*}\\
[\sigma]_p &= (\Psi_{(e)} + \Psi_{(e)}^*)\,s\,\frac{2P}{\cot\gamma\,\cos\delta\,\cos\varepsilon_2} =\\
&= (\Psi_{(e)} + \Psi_{(e)}^*)\,s\,\frac{2P}{\cot\gamma^*\,\sin\delta\,\cos\varepsilon_2^*}.
\end{aligned}$$

Mittelst der Gleichungen (ε) kann man beweisen, dass diese Ausdrücke (vom Eigenwichte abgesehen) auch den Gleichgewichts-Gleichungen nach den auf die Seitenflächen normalen Richtungen, wie auch für die verticale Gleichgewichts-Gleichung, für irgend einen Satz von vier Knotenpunkten genügen.

Für den Pfeiler mit quadratischem Querschnitte und gleichen Querschnitten der Stangen auf den vier Seitenflächen hat man:

$$(\text{XLVII}')\qquad \Psi_{(e)} = \Psi_{(e)}^* = \frac{o}{O\,[r + 2s + (e + e^2)\,o] + 2o\,(r + 2s)}$$

$$(\text{XLVIII}') \qquad \xi_{mp} = \zeta_{mp} = \Psi_{(e)} \frac{a^2_m}{b_m} \cdot \frac{1+e}{2} P$$

$$[\Omega]_p = [1 - 2\Psi_{(e)}(r + 2s)] \frac{P}{\cos \varepsilon_1}$$

$$(\text{XLIX}') \qquad [\omega]_p = \Psi_{(e)}(r + 2s) \frac{P}{\cos \gamma \cos \varepsilon_2}$$

$$[\varrho]_p = \Psi_{(e)}\, r \frac{2P}{\cot \gamma \cos \varepsilon_2}$$

$$[\sigma]_p = 2\sqrt{2}\,\Psi_{(e)}\, s \frac{2P}{\cot \gamma \cos \varepsilon_2}.$$

Die drei ersten Gleichungen (XLIX′) unterscheiden sich von (XVII) nur durch die schon bekannte Transformirung der Coëfficienten und durch die Anwesenheit von $\cos \varepsilon_2$ im Nenner (wenn man beachtet, dass $\cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon \cos \varepsilon_2$).

Diese expliciten Ausdrücke für die Verschiebungen und inneren Kräfte könnte man jetzt auf ähnliche Weise und mit analogen Resultaten einer Discussion unterziehen, wie dies für den prismatischen Pfeiler im §. 22 ausgeführt wurde; wir unterlassen dies jedoch hier und werden an geeigneter Stelle[1]) auf die Anwendung von (XLIX) zurückkommen.

Für einen Pfeiler, welcher mit einer gewissen Annäherung der Bedingung der geometrischen Aehnlichkeit der Felder entspricht, werden wir (XLIX) als Gleichungen der inneren Kräfte annehmen, indem wir in denselben allen Bezeichnungen wieder die Zeiger geben und dieselben, wie für den analogen Fall am Ende des §. VII angegeben, modificiren. Die so transformirten Formeln sind in der Tabelle des §. XXIX angeführt.

III. Capitel.

Bestimmung der halben Differenzen ξ_{mq} η_{mq} ζ_{mq} etc.

(Componenten der Inanspruchnahme [Q].)

§. XXIII. Allgemeine Gesetze etc. — Bezeichnungen.

Die allgemeinen Gesetze der Deformation und des Systemes der inneren Kräfte, von der Inanspruchnahnahme [Q] hervorgebracht, wurden

---

[1]) Siehe am Schlusse: Constructive Probleme.

schon als Folgerung des Fundamental-Lehrsatzes im §. XVII vorgebracht und erläutert, weshalb wir den Leser darauf ohne Hinzufügung weiterer Bemerkungen verweisen.

Wir behalten die früheren Bezeichnungen bei und werden überdies benennen (Fig. 26):

$2M_m$ — das Moment aller Kräfte, welche den Pfeiler oberhalb des m^{ten} Feldes beanspruchen mit Bezug auf die Gerade BB, welche die Kreuzungspunkte der m^{ten} geneigten Stangen verbindet, die auf den beiden Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega''}$, parallel zur Inanspruchnahme liegen.

$2N_m$ — das Moment derselben Kräfte, mit Bezug auf eine zu BB Parallele, welche durch den Schnittpunkt A der Säulenachsen gelegt ist.

d_m — die Länge der Geraden B* B*, welche die Schnittpunkte der m^{ten} geneigten Stangen verbindet, die auf den zur Inanspruchnahme senkrechten Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$, $\overline{\Omega''\Omega''}$ liegen.

D_m — die Länge der Geraden A* A*, welche die Kreuzungspunkte der m^{ten} geneigten, gegenüberliegenden Stangen verbindet, die auf den zur Inanspruchnahme, parallelen Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$ liegen.

Diese Längen sind gegeben durch:

$$(\Delta)\qquad d_m = \frac{2 b_m b_{m-1}}{b_m + b_{m-1}}$$

$$D_m = \frac{2 b_m b_{m-1}}{b_m - b_{m-1}}.$$

Legt man durch BB eine Ebene normal auf eine der Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$ oder $\overline{\Omega''\Omega''}$, so ist die Länge c_m des Säulentheiles, welcher zwischen dem m^{ten} Knotenpunkte und dem Schnittpunkte obiger Ebene mit der Säule liegt, ausgedrückt durch:

$$c_m = \frac{b_m \cos(\Gamma_m - \varepsilon_2^*)}{2 \sin \Gamma_m \cos \varepsilon^*},$$

wobei Γ_m die Projection des Winkels γ_m auf die Mittelebene des Pfeilers ist; dieser Winkel ist bestimmt durch:

$$\tang \Gamma_m = \frac{\tang \gamma_m}{\cos \varepsilon_2}.$$

§. XXIV. Gleichgewichts-Gleichungen.

Wenn man sich den Pfeiler durch vier auf den Säulenachsen normale Ebenen oberhalb des m^{ten} Feldes geschnitten denkt, so sind die Bedingungen des Gleichgewichtes für den oberhalb dieser Schnitte verbleibenden Theil des Pfeilers, in Bezug auf Drehung um die Gerade BB, und die zu derselben durch den Schnittpunkt A der Säulen gelegte Parallele ausgedrückt durch:

$$\left(([\Omega''_m] - [\Omega'_m]) \cos \varepsilon^* + ([\omega''_m]^* - [\omega'_m]^*) \cos \gamma_m^*\right) \frac{\mathrm{d}_m \cos \varepsilon_2^*}{2} =$$

$$= \mathrm{M}_m - (\mu'_m - \mu''_m) \cos \varepsilon^* + (\tau'_m - \tau''_m)\, \mathrm{c}_m \cos \varepsilon^*$$

$$([\omega''_m] - [\omega'_m]) \frac{\mathrm{D}_m \cos \gamma_m \cos \varepsilon_2}{2} =$$

$$= \mathrm{N}_m + (\mu'_m - \mu_m'') \cos \varepsilon^* - (\tau'_m - \tau''_m) \frac{\mathrm{b}_m}{2 \sin \varepsilon_2^*}.$$

Eliminirt man c_m mittelst obigen Werthes und τ mittelst:

$$\tau'_m = \frac{-\mu'_{m-1} + \mu'_m}{\mathrm{a}_m} \cos \varepsilon_1 \qquad \tau''_m = \frac{-\mu''_{m-1} + \mu''_m}{\mathrm{a}_m} \cos \varepsilon_1,$$

so reduciren sich die vorstehenden Gleichungen mit Benützung von (ε) und der allgemeinen Bezeichnungen (32) auf die Form:

$$\text{(L)} \qquad [\Omega_m]_q' \cos \varepsilon_1 + [\omega_m]_q^* \cos \gamma_m^* \cos \varepsilon_2^* = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathrm{d}_m}$$

$$\text{(LI)} \qquad [\omega_m]_q \cos \gamma_m \cos \varepsilon_2 = \frac{\mathfrak{N}_m}{\mathrm{D}_m},$$

wobei nachstehende Beziehungen gelten:

$$\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathrm{d}_m} = \frac{\mathrm{M}_m}{\mathrm{d}_m} - \alpha''_m \frac{\mu_{m-1q} \cos \varepsilon^*}{\mathrm{b}_{m-1}} - \alpha'_m \frac{\mu_{mq} \cos \varepsilon^*}{\mathrm{b}_m}$$

$$\frac{\mathfrak{N}_m}{\mathrm{D}_m} = \frac{\mathrm{N}_m}{\mathrm{D}_m} + \frac{\mu_{m-1q} \cos \varepsilon^*}{\mathrm{b}_{m-1}} - \frac{\mu_{mq} \cos \varepsilon^*}{\mathrm{b}_m}$$

(LII)

$$\alpha'_m = \frac{\cos(\Gamma_m + \varepsilon_2^*) \cos \varepsilon_2^*}{\cos \Gamma_m} = 1 - \frac{\mathrm{b}_m}{\mathrm{a}_m} \sin \varepsilon_2^* \cos \varepsilon_2^*$$

$$\alpha''_m = \frac{\cos(\Gamma_m - \varepsilon_2^*) \cos \varepsilon_2^*}{\cos \Gamma_m} = 1 + \frac{\mathrm{b}_{m-1}}{\mathrm{a}_m} \sin \varepsilon_2^* \cos \varepsilon_2^*.$$

Transformirt man die für $m = 1$ bis $m = n$ anwendbaren Gleichungen (L) und (LI) mittelst (XXXI), so erhält man zwei Systeme, deren allgemeine Gleichungen auf die Form reducirbar sind:

$$\text{(LIII)} \quad \eta_{m-1q} - \eta_{mq} = \frac{a_m}{O_m + o_m{}^*} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{d_m} +$$

$$+ \left(\frac{b_m{}^* w_m{}^*}{a_m} - \operatorname{tang} \varepsilon_2\right) \zeta_{m-1q} + \left(\frac{b_{m-1}{}^* w_m{}^*}{a_m} + \operatorname{tang} \varepsilon_2\right) \zeta_{mq} -$$

$$- (\xi_{m-1q} - \xi_{mq}) \operatorname{tang} \varepsilon_2{}^*$$

$$\text{(LIV)} \quad \xi_{m-1q} - \xi_{mq} =$$

$$= \left(\frac{a_m}{O_m} \cdot \frac{\mathfrak{N}_m}{D_m} + \eta_{m-1q} + \eta_{mq} + (\zeta_{m-1q} + \zeta_{mq}) \operatorname{tang} \varepsilon_2\right) \cot \gamma_m \cos \varepsilon_2.$$

Wenn man die beiden mittelst (XXXI) transformirten Gleichungen (XXXVI) subtrahirt und daraus die Differenz: $\eta_{m-1q} - \eta_{mq}$, $\eta_{mq} - \eta_{m+1q}$ mittelst (LIII) eliminirt, so erhält man nach Reducirung und Division durch $\cos \varepsilon_2$ die mit (VII) analoge Formel:

$$\text{(LV)} \quad \frac{Z_{mq}}{\cos \varepsilon_2} = \frac{b_{m-1}{}^* w_m{}^*}{a_m} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{d_m} + \frac{b_{m+1}{}^* w_{m+1}{}^*}{a_{m+1}} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{d_{m+1}} -$$

$$- \frac{b_{m-1}{}^* b_m{}^*}{a^3_m} u_m{}^* \zeta_{m-1q} - \left(\frac{b_{m-1}{}^{*2}}{a^3_m} u_m{}^* +\right.$$

$$\left. + \frac{2 b_m{}^{*2}}{a^3_m} r_m{}^* + \frac{b_{m+1}{}^{*2}}{a^3_{m+1}} u_{m+1}{}^*\right) \zeta_{mq} - \frac{b_m{}^* b_{m+1}{}^*}{a^3_{m+1}} u_{m+1}{}^* \zeta_{m+1q}.$$

(L), (LI), (LIII), (LIV), (LV) bilden die Fundamental-Formeln für die Lösung der Aufgabe.

§. XXV. Lösung der Aufgabe, wenn man den Pfeiler als ein gelenkiges System betrachtet.

Bei dieser Annahme hat man:

$$\mathfrak{M}_m = M_m \quad \mathfrak{N}_m = N_m \quad Z_{mq} = 0.$$

(LV) liefert daher das System zur Bestimmung der ζ_q in der allgemeinen Form:

$$\text{(LVI)} \quad \mathfrak{A}_m \zeta_{m-1q} + \mathfrak{B}_m \zeta_{mq} + \mathfrak{A}_{m+1} \zeta_{m+1q} =$$

$$= \frac{b_{m-1}{}^* w_m{}^*}{a_m} \cdot \frac{M_m}{d_m} + \frac{b_{m+1}{}^* w_{m+1}{}^*}{a_{m+1}} \cdot \frac{M_{m+1}}{d_{m+1}}$$

ein System, welches die Aufgabe der Inanspruchnahme auf Zerknicken (oder Zerreissen) für die aus den Seitenflächen $\overline{\Omega' \Omega'}$ oder $\overline{\Omega'' \Omega''}$ bestehenden Wandpfeiler ausdrückt.

Wenn die ζ_q bekannt sind, so kann man die η_q mittelst der beiden Systeme (LIII) und (LIV) bestimmen, indem man aus den correspondirenden Paaren von Gleichungen die Differenzen $\xi_{m-1q} - \xi_{mq}$ eliminirt.

Nach Durchführung der Eliminirung mit auf Grund von (ε) und (Δ) gemachten, geeigneten Transformirungen ergibt sich ein System von der allgemeinen Form:

$$(\text{LIII}') \quad \frac{\eta_{m-1q}}{\mathfrak{b}_{m-1}} - \frac{\eta_{mq}}{\mathfrak{b}_m} = \frac{\mathfrak{a}_m}{\mathfrak{O}_m + \mathfrak{o}_m^*} \frac{\mathrm{M}_m}{\mathfrak{d}^2_m} - \frac{\mathfrak{a}_m}{\mathfrak{o}_m} \cdot \frac{\mathrm{N}_m}{\mathrm{D}^2_m} -$$

$$+ \frac{\mathfrak{b}_{m-1}^* \, \mathfrak{b}_m^*}{\mathfrak{d}_m} \cdot \frac{\mathfrak{w}_m}{\mathfrak{a}_m} \left(\frac{\zeta_{m-1q}}{\mathfrak{b}_{m-1}^*} + \frac{\zeta_{mq}}{\mathfrak{b}_m^*} \right) - \operatorname{tang} \varepsilon_2 \left(\frac{\zeta_{m-1q}}{\mathfrak{b}_{m-1}} - \frac{\zeta_{mq}}{\mathfrak{b}_m} \right).$$

Mit Beachtung von $\eta_{nq} = 0$ ergibt dieses System durch successive Summirung die η_q und auf gleiche Weise das System (LIV) die ξ_q.

Schliesslich ergeben (L) und (LI):

$$(\text{LVII}) \quad \begin{aligned} [\Omega_m]_q \cos \varepsilon^* + [\omega_m]_q^* \cos \gamma_m^* &= \frac{\mathrm{M}_m}{\mathfrak{d}_m \cos \varepsilon_2^*} \\ [\omega_m]_q \cos \gamma_m &= \frac{\mathrm{N}_m}{\mathrm{D}_m \cos \varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Wir erinnern an die im §. 25 gemachten Bemerkungen bezüglich der Unmöglichkeit einer genauen, expliciten Bestimmung der inneren Kräfte, wegen des in dieser Untersuchung enthaltenen Problemes der Zerknickung.

§. XXVI. Explicite, angenäherte Lösung (gelenkiges System).

Diese Lösung lässt sich damit erzielen, dass man die Aufgabe durch die Annahme der geometrischen Aehnlichkeit der Felder noch weiter beschränkt. Unter dieser Voraussetzung, und die Querschnitte der correspondirenden Glieder in den verschiedenen Feldern paarweise und zu vier als constant angenommen, reducirt sich das System (LVI) auf die Form:

(LVI') $$e u^* \zeta_{m-1q} + [(e + e^2) u^* + 2 r^*] \zeta_{mq} + e^2 u^* \zeta_{m+1q} = \\ = w^* \frac{a^2_m}{b_m^*} \cdot \frac{1+e}{2} \cdot \frac{M_m + M_{m+1}}{b_m}.$$

Vernachlässigt man die horizontalen Kräfte q_m, so lässt sich das Moment für das m^{te} Feld ausdrücken:

$$M_m = M + Q \frac{d_m - b_0}{\operatorname{tang} \varepsilon_2^*}.$$

Berücksichtigt man die Gleichungen:

$$b_0 = e^m b_m \qquad d_m = \frac{2e}{1+e} \cdot b_m$$

und setzt:

(LVIII) $$\psi_{(e)}^* = \frac{w^*}{(e+e^2) u^* + r^*} = \frac{o^*}{O r^* + (e + e^2)\, O\, o^* + o^* r^*}$$

so kann man beweisen, dass der allgemeinen Gleichung (LVI') strenge genügt wird durch den Ausdruck:

(LIX) $$\zeta_{mq} = \psi_{(e)}^* \frac{a^2_m}{b_m^*} \cdot \frac{1+e}{4} \cdot \frac{M_m + M_{m+1}}{b_m}.$$

Mit Berücksichtigung von (32) erhält man aus (XXXI):

$$[\Omega_m]_q = [(\xi_{m-1q} - \xi_{mq}) \operatorname{tang} \varepsilon_2^* + \eta_{m-1q} - \eta_{mq} + \\ + (\zeta_{m-1q} - \zeta_{mq}) \operatorname{tang} \varepsilon_2] \frac{O}{a_m \cos \varepsilon_1}$$

Substituirt man in diese Gleichung die Glieder:

$$(\xi_{m-1q} - \xi_{mq}) \operatorname{tang} \varepsilon_2^* + \eta_{m-1q} - \eta_{mq}$$

aus (LIII) (die Coëfficienten und Glieder mittelst der Annahme des Pfeilers als gelenkiges System und mit ähnlichen Feldern modificirt), eliminirt aus den so erhaltenen Ausdrücken mit ζ_q diese Unbekannte mittelst (LIX) und macht auf Grund der früheren Gleichungen alle Abkürzungen, so erhält man schliesslich:

$$[\Omega_m]_q = (1 - \psi_{(e)}^* r^*) \frac{M_m}{d_m \cos \varepsilon_1}.$$

(LVII) gibt dann (LX)

$$[\omega_m]_q^* = \psi_{(e)}^* r^* \frac{M_m}{d_m \cos \gamma^* \cos \varepsilon_2^*}$$

und (XXXI) mit (LIX) nach geeigneten Abkürzungen:

$$[\varrho_m]_q^* = \psi_{(e)}^* \, r^* \, \frac{M_m + M_{m+1}}{b_m \cot \gamma^* \cos \varepsilon_2^*}.$$

Für die übrigen Glieder hat man: (LX)

$$[\omega_m]_q = \frac{N_m}{D_m \cos \gamma \cos \varepsilon_2}$$

$$[\varrho_m]_q = [\sigma_m]_q = 0.$$

Die angenäherten Formeln (LX) können sich auch auf die horizontalen Kräfte q_m beziehen, welche wegen der Einfachheit der Rechnung von der Untersuchung ausgeschlossen wurden, und weil, dieselben berücksichtigt, die (LIX) der (LVI′) nicht vollkommen genügen würde.

Schliesslich nehmen wir dieselben, indem wir den Coëfficienten die Zeiger wieder geben, für das Gleichgewicht eines Pfeilers an, welcher nur annäherungsweise, wie es im Allgemeinen der Fall ist, die Bedingung der geometrischen Aehnlichkeit der Felder erfüllt.

§. XXVII. Die Continuität der Säulen und deren Befestigung an den Enden in Rechnung gezogen.

Wir machen die Untersuchung dieses Falles zur Vervollständigung der allgemeinen Uebersicht der Formeln, aber die Systeme von Gleichungen, welche man erhält, können aus den im §. XIII angeführten Gründen der expliciten Lösung nicht unterzogen werden.

Die doppelte und gleichzeitige Aufsuchung der μ_q und ζ_q führt man auf dieselbe Weise wie für den prismatischen Pfeiler durch, indem man mittelst der Systeme (M) und (O) die Biegung der Säulen studirt, welche man auf durch dieselben gehende und auf die Seitenflächen normale Ebenen projicirt.

A. Biegung der Säulen $\Omega'\Omega''$, welche auf die zu $\overline{\Omega'\Omega'}$ $\overline{\Omega''\Omega''}$ normalen Ebenen respective projicirt sind.

Um das System (M) auf das Studium dieser Projectionen der deformirten Säulenachsen anwenden zu können, transformiren wir dasselbe, indem wir setzen:

$$l_m = \frac{a_m}{\cos \varepsilon_1} \qquad E = E_1 \qquad I = \Omega i^2 \qquad q = p \sin \varepsilon_2^* \qquad x_n = t_n = 0,$$

für die Säule Ω':

$$x_m = \eta'_m \sin \varepsilon_2^* - \xi'_m \cos \varepsilon_2^* \qquad M_m = \mu'_m,$$

für die Säule Ω'':

$$x_m = \eta''_m \sin \varepsilon_m^* - \xi''_m \cos \varepsilon_m^* \qquad M_m = \mu''_m.$$

Subtrahirt man die beiden Systeme, indem man die gewöhnlichen Gleichungen und Beziehungen berücksichtigt, dividiert dann durch $\cos \varepsilon^*$, so erhält man ein System von der allgemeinen Form:

$$(\text{LXI}) \quad \left(\frac{\xi_{m-1q} - \xi_{mq}}{a_m} - \frac{\xi_{mq} - \xi_{m+1q}}{a_{m+1}}\right) \cos \varepsilon_2^* -$$

$$- \left(\frac{\eta_{m-1q} - \eta_{mq}}{a_m} - \frac{\eta_{mq} - \eta_{m+1q}}{a_{m+1}}\right) \sin \varepsilon_2^* =$$

$$= \frac{\cos \varepsilon_1}{6 O i^2} [a_m \mu_{m-1q} + 2 (a_m + a_{m+1}) \mu_q + a_{m+1} \mu_{m+1q}].$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung die Glieder mit η_q mittelst (LIII), so wird dieselbe:

$$(\text{LXI}') \quad \frac{\xi_{m-1q} - \xi_{mq}}{a_m} - \frac{\xi_{mq} - \xi_{m+1q}}{a_{m+1}} =$$

$$= \frac{\cos \varepsilon_2^* \cos \varepsilon_1}{6 O i^2} [a_m \mu_{m-1q} + 2 (a_m + a_{m+1}) \mu_{mq} + a_{m+1} \mu_{m+1q}] +$$

$$+ \sin \varepsilon_2^* \cos \varepsilon_2^* \left(\frac{1}{O + o_m^*} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{d_m} - \frac{1}{O + o_{m+1}^*} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{d_{m+1}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{a_m} \left(\frac{b_m^* w_m^*}{a_m} - \operatorname{tang} \varepsilon_2\right) \cdot \xi_{m-1q} + \left[\frac{1}{a_m} \left(\frac{b_{m-1}^* w_m^*}{a_m} + \operatorname{tang} \varepsilon_2\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{a_{m+1}} \left(\frac{b_{m+1}^* w_{m+1}^*}{a_{m+1}} - \operatorname{tang} \varepsilon_2\right)\right] \xi_{mq} -$$

$$\left. - \frac{1}{a_{m+1}} \left(\frac{b_m^* w_{m+1}^*}{a_{m+1}} + \operatorname{tang} \varepsilon_2\right) \cdot \xi_{m+1q}\right).$$

Transformirt man jetzt das System (LIV), indem man jede m^{te} Gleichung desselben mit $\operatorname{tang} \gamma_m$ multiplicirt, durch $\cos \varepsilon_2$ dividirt und sodann jede Gleichung von der vorigen abzieht, und beachtet man:

$$\frac{\text{tang}\,\gamma_m}{\cos\varepsilon_2} = \frac{b_m}{a_m} - \text{tang}\,\varepsilon_2^* = \frac{b_{m-1}}{a_m} + \text{tang}\,\varepsilon_2^*,$$

so vereinfacht sich das resultirende System auf die allgemeine Form:

$$\text{(LIV')} \quad \left(\frac{\xi_{m-1q} - \xi_{mq}}{a_m} - \frac{\xi_{mq} - \xi_{m+1q}}{a_{m+1}}\right) b_m = \frac{a_m}{o_m} \cdot \frac{\mathfrak{N}_{mt}}{D_m} - \frac{a_{m+1}}{o_{m+1}} \cdot \frac{\mathfrak{N}_{m+1}}{D_{m+1}} +$$

$$+ (\xi_{m-1q} - \xi_{m+1q})\,\text{tang}\,\varepsilon_2^* + \eta_{m-1q} - \eta_{m+1q} + (\zeta_{m-1q} - \zeta_{m+1q})\,\text{tang}\,\varepsilon_2.$$

Aus dieser Gleichung kann man die Ausdrücke mit ξ_q im ersten Gliede mittelst (LXI') direct eliminiren und die Ausdrücke mit η_q und ξ_q im zweiten Gliede mittelst einer Gleichung, welche man durch Summirung der m^{ten} und $m + 1^{\text{sten}}$ des Systemes (LIII) erhält. Die allgemeine Gleichung des ersten Systemes, welches die μ_q und ζ_q enthält, ergibt sich nach vielfachen, complicirten Reducirungen, welche auf Grund aller vorstehenden Gleichungen ausgeführt werden, und wenn man setzt:

$$\text{(LXII)} \quad \begin{aligned}
F_{m1} &= \frac{b_{m-1}\,b_m}{6 i^2}\cos^2\varepsilon_2^* - \frac{O}{o_m} + \alpha'_m\,\alpha''_m\,\frac{O}{O + o_m^*} \\
F'_{m2} &= \frac{b^2_m}{3 i^2}\cos^2\varepsilon_2^* + \frac{O}{o_m} + \alpha'^2_m\,\frac{O}{O + o_m^*} \\
F''_{m2} &= \frac{b^2_m}{3 i^2}\cos^2\varepsilon_2^* + \frac{O}{o_{m+1}} + \alpha''^2_{m+1}\,\frac{O}{O + o_{m+1}^*} \\
L'_{m1} &= \alpha'_m\,b_m^*\,w_m^* + b_m\,\frac{\sin\varepsilon\,\sin\varepsilon^*}{\cos^2\varepsilon^*} \\
L'_{m2} &= \alpha'_m\,b_{m-1}^*\,w_m^* - b_m\,\frac{\sin\varepsilon\,\sin\varepsilon^*}{\cos^2\varepsilon^*} \\
L''_{m2} &= \alpha''_{m+1}\,b_{m+1}^*\,w_{m+1}^* - b_m\,\frac{\sin\varepsilon\,\sin\varepsilon^*}{\cos^2\varepsilon^*} \\
L''_{m1} &= \alpha''_{m+1}\,b_m^*\,w_{m+1}^* + b_m\,\frac{\sin\varepsilon\,\sin\varepsilon^*}{\cos^2\varepsilon^*},
\end{aligned}$$

wodurch sich das resultirende System auf die allgemeine Form vereinfacht:

$$\mathrm{F}_{m\cdot 1}\, \mathfrak{a}_m \frac{\mu_{m-1q}}{\mathfrak{b}_{m-1}} + (\mathrm{F}'_{m2}\, \mathfrak{a}_m + \mathrm{F}''_{m2}\, \mathfrak{a}_{m+1}) \frac{\mu_{mq}}{\mathfrak{b}_m} + \mathrm{F}_{m+1\cdot 1}\, \mathfrak{a}_{m+1} \frac{\mu_{m+1q}}{\mathfrak{b}_{m+1}} =$$

$$\text{(LXIII)} \quad = \left(\alpha'_m \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{O} + \mathrm{o}_m{}^*} \cdot \frac{\mathrm{M}_m}{\mathrm{d}_m} + \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}_m} \cdot \frac{\mathrm{N}_m}{\mathrm{D}_m}\right) \mathfrak{a}_m + \\ + \left(\alpha''_{m+1} \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{O} + \mathrm{o}_{m+1}{}^*} \cdot \frac{\mathrm{M}_{m+1}}{\mathrm{d}_{m+1}} - \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}_{m+1}} \frac{\mathrm{N}_{m+1}}{\mathrm{D}_{m+1}}\right) \mathfrak{a}_{m+1} + \\ + \mathrm{O}\left[\frac{\mathrm{L}'_{m1}}{\mathfrak{a}_m} \zeta_{m-1q} + \left(\frac{\mathrm{L}'_{m2}}{\mathfrak{a}_m} + \frac{\mathrm{L}''_{m2}}{\mathfrak{a}_{m+1}}\right) \zeta_{mq} + \frac{\mathrm{L}''_{m1}}{\mathfrak{a}_{m+1}} \zeta_{m+1q}\right].$$

Bezüglich des Einflusses der verschiedenen bekannten oder unbekannten Grössen, welche in den Gliedern dieser Gleichung enthalten sind, verweisen wir auf die in den §§. XII und 28 gemachten Bemerkungen; übrigens sind (XXVI) und (63) mit obiger Gleichung nach verschiedenen Richtungen analog.

Bei Annahme der geometrischen Aehnlichkeit der Felder und constanter Querschnitte verwandelt sich (LXIII) mit Vernachlässigung eines Gliedes mit q_m in:

$$\text{(LXIII')} \quad \mathrm{e}\,\mathrm{F}_{m\cdot 1} \frac{\mu_{m-1q}}{\mathfrak{b}_{m-1}} + (\mathrm{e}\,\mathrm{F}'_{m2} + \mathrm{F}''_{m2}) \frac{\mu_{mq}}{\mathfrak{b}_m} + \mathrm{F}_{m+1\cdot 1} \frac{\mu_{m+1q}}{\mathfrak{b}_{m+1}} = \\ = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{O} + \mathrm{o}^*} \cdot \frac{\alpha' \mathrm{M}_m + \alpha'' \mathrm{M}_{m+1}}{\mathrm{d}_{m+1}} + \\ + \frac{\mathrm{O}}{\mathfrak{a}_m \mathfrak{a}_{m+1}} [\mathrm{L}'_{m1}\, \zeta_{m-1q} + (\mathrm{L}'_{m2} + \mathrm{e}\, \mathrm{L}''_{m2})\, \zeta_{mq} + \mathrm{e}\, \mathrm{L}''_{m1}\, \zeta_{m+1q}].$$

Diese Gleichung kann man noch dadurch vereinfachen, dass man für die ζ_q die bei Annahme des gelenkigen Systemes erhaltenen angenäherten Ausdrücke (LIX) substituirt; nach durchgeführter Reducirung erhält (LXIII') mit einer gewissen Annäherung[1]) die Form:

$$\text{(LXIII'')} \quad \mathrm{e}\,\mathrm{F}_{m1} \frac{\mu_{m-1q}}{\mathfrak{b}_{m-1}} + \ldots \text{ etc.} = (1 - \psi_{(e)}{}^* \mathrm{r}^*) \frac{\alpha' \mathrm{M}_m + \alpha'' \mathrm{M}_{m+1}}{\mathrm{d}_{m+1}}.$$

Man kann noch weiter vereinfachen, wenn man bei den Coëfficienten F für die Glieder mit α' und α'' die Einheit und für jedes der

---

[1]) Diese Transformirung ist nur dann in strenger Weise durchgeführt, wenn man $\mathrm{M}_m = \mathrm{M} =$ constant setzt; aber in Anbetracht des geringen Einflusses der Glieder mit ζ_q verallgemeinern wir das Resultat in der in (LXIII'') angezeigten Art.

Momente auf Umstürzen ihr arithmetisches Mittel setzt; dann transformirt sich die vorstehende Gleichung in:

$$\text{(LXIII''')}\quad e\,F_{m\cdot 1}\frac{\mu_{m-1q}}{b_{m-1}} + (1 + e)\,F_{m2}\frac{\mu_{mq}}{b_m} + F_{m+1\cdot 1}\frac{\mu_{m+1q}}{b_{m+1}} =$$
$$= (1 - \psi_{(e)}{}^* r^*)\,\frac{M_m + M_{m+1}}{d_{m+1}}\cos^2\varepsilon_2{}^*.$$

B. Biegung der Säulen, dieselben auf Ebenen projicirt, welche durch jene gehen und zu den Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega''}$ normal sind.

Ein zweites System zwischen den ζ_q und μ_q zur Bestimmung genauerer Ausdrücke für die ζ_q erhält man durch Combination der Gleichung (LV) mit dem Systeme (O), bei dessen Anwendung sind wir jedoch auf die Annahme der gleichen Höhe der Felder beschränkt. Wendet man dieses System auf das Studium der Biegung der in obiger Weise projicirten Säulenachsen an mit den im §. XXI bestimmten Transformationen und subtrahirt die beiden so erhaltenen Systeme, so ergibt sich:

$$\text{(LXIV)}\quad \frac{Z_{m-1q}}{\cos\varepsilon_2} + \frac{4Z_{mq}}{\cos\varepsilon_2} + \frac{Z_{m+1q}}{\cos\varepsilon_2} =$$
$$= \frac{6\,O\,i^{*2}}{a^3}\,(\zeta_{m-2q} - 4\,\zeta_{m-1q} + 6\,\zeta_{mq} - 4\,\zeta_{m+1q} + \zeta_{m+2q}).$$

Die (LXIV) und (LV) führen dann zu einem Systeme zwischen den ζ_q und μ_q von der allgemeinen Form:

$$a_{m1}{}^*\,\zeta_{m-2q} + a_{m2}{}^*\,\zeta_{m-1q} + a_{m3}{}^*\,\zeta_{mq} + a_{m4}{}^*\,\zeta_{m+1q} + a_{m5}{}^*\,\zeta_{m+2q} =$$
$$\text{(LXV)}\quad = a^2\Big(b_{m-2}{}^*\,w_{m-1}{}^*\,\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{d_{m-1}} + (4\,b_{m-1}{}^* + b_m{}^*)\,w_m{}^*\,\frac{\mathfrak{M}_m}{d_m} +$$
$$+ b_{m+2}{}^*\,w_{m+2}{}^*\,\frac{\mathfrak{M}_{m+2}}{d_{m+2}} + (b_m{}^* + 4\,b_{m+1}{}^*)\,w_{m+1}{}^*\,\frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{d_{m+1}}\Big),$$

worin die a^* nichts Anderes als die Coëfficienten (XI) sind, wenn man dieselben für die einfachen Pfeiler anwendet, welche die Seitenflächen $\overline{\Omega'\Omega'}$, $\overline{\Omega''\Omega''}$ bilden, weshalb man auch:

b, i, r, u mit b^*, i^*, r^*, u^* respective vertauschen muss.

Die Gleichung (LXV) kann nur durch analoge Annäherung auf Grund der bezüglichen Formeln für den prismatischen Pfeiler vereinfacht werden,

nachdem sich für den Pfeiler mit geneigten Säulen kein expliciter Ausdruck für μ_{mq} aufstellen lässt.

Wir werden analog mit (68) und (52′) setzen:

(LII′) $$\mathfrak{M}_m = \Phi_m \mathrm{M}_m,$$

worin Φ_m mit dem in (68) definitiven Coëfficienten Φ analog ist. (Siehe Tabelle §. XXIX.)

Wenn man die q_m vernachlässigt und annäherungsweise[1]) setzt:

$$\mathrm{M}_m = \mathrm{M} + 2\,\mathrm{Q}\left(m - \frac{1}{2}\right)\mathrm{a},$$

so transformirt sich (LXV) in:

(LXV′) $$a_{m1}{}^* \zeta_{m-2q} + \ldots\ldots \text{etc.} = c_{m1}{}^* \mathrm{M\,a}^2 + 2\,c_{m2}{}^* \mathrm{Q\,a}^3,$$

worin $c_{m1}{}^*$ und $c_{m2}{}^*$ mit den aus (XI) bekannten $c_{m1}\,c_{m2}$ analoge Werthe sind, und man kann daher dieselben erhalten, wenn man

$$\mathrm{b}_m, \quad \mathrm{w}_m \quad \text{in} \quad \mathrm{b}_m{}^*, \quad \frac{\Phi_m\,\mathrm{w}_m{}^*}{\mathrm{d}_m} \quad \text{umtauscht.}$$

Die numerische Anwendung der vereinfachten Systeme (LXIII′′′) und (LXV′), welche in Anbetracht des geringen Einflusses der zwar vernachlässigten, aber durch angenäherte Werthe wieder ersetzten Glieder von mehr als genügender Genauigkeit sind, ist auch von praktischem Werthe, wenn man die Aufgabe mit einer gewissen Genauigkeit lösen will, speciell mit Bezug auf die Befestigung der Endquerschnitte der Säulen.

§. XXVIII. Explicite, angenäherte Formeln.

Die Unmöglichkeit einer expliciten Lösung aus der allgemeinen Gleichung (LXIII), auch in der vereinfachten Form (LXIII′′′), führt zu analogen Schlussfolgerungen wie im §. XIII; dagegen die Undurchführbarkeit einer ähnlichen Lösung aus (LXV), selbst in der vereinfachten Form (LXV′), zu analogen Schlussfolgerungen wie im §. VII.

Wir nehmen daher, analog mit (69), als allgemeine Ausdrücke für die inneren Kräfte, bei Annahme der Continuität der Säulen, die

---

[1]) Dieser Ausdruck für M_m ist nicht vollkommen genau, weil der Kreuzungspunkt der m^{ten} geneigten Stangen nicht genau in die Mitte der Höhe des m^{ten} Feldes fällt.

Gleichungen (LX) an, welche wir dadurch verallgemeinern, dass wir allen Grössen die Zeiger wieder geben und durch den Coëfficienten Φ_m corrigiren.

Die so transformirten Gleichungen sind in der folgenden Tabelle gegeben.

§. XXIX. Tabelle der totalen inneren Kräfte in Folge der beiden Beanspruchungen [P] und [Q].

Verallgemeinert man (XLIX) wie im §. XXII angegeben und (LX) mit der im vorigen Paragraphen angegebenen Correctur, so resultiren folgende Ausdrücke für die totalen inneren Kräfte;

$$\left.\begin{matrix}[\Omega'_m]\\ [\Omega''_m]\end{matrix}\right\} = (1 - \Psi_m r_m - \Psi_m{}^* r_m{}^* - 2[\Psi_m + \Psi_m{}^*]\, s_m)\frac{P_m}{\cos\varepsilon_1} \mp$$

$$\mp (1 - \psi_m{}^* r_m{}^*)\frac{\Phi_m M_m}{d_m \cos\varepsilon_1}$$

$$\left.\begin{matrix}[\omega'_m]\\ [\omega''_m]\end{matrix}\right\} = (\Psi_m\, r_m + [\Psi_m + \Psi_m{}^*]\, s_m)\frac{P_m}{\cos\gamma_m \cos\varepsilon_2} \mp$$

$$\mp \frac{\Phi_m N_m}{D_m \cos\gamma_m \cos\varepsilon_2}$$

$$\left.\begin{matrix}[\omega'_m]^*\\ [\omega''_m]^*\end{matrix}\right\} = (\Psi_m{}^* r_m{}^* + [\Psi_m + \Psi_m{}^*]\, s_m)\frac{P_m}{\cos\gamma_m{}^* \cos\varepsilon_2{}^*} \mp$$

$$\mp \psi_m{}^* r_m{}^* \frac{\Phi_m M_m}{d_m \cos\gamma_m{}^* \cos\varepsilon_2{}^*}$$

$$[\varrho_m] \quad = \Psi_m r_m \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot\gamma_m \cos\varepsilon_2}$$

$$\left.\begin{matrix}[\varrho'_m]^*\\ [\varrho''_m]^*\end{matrix}\right\} = \Psi_m{}^* r_m{}^* \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot\gamma_m{}^* \cos\varepsilon_2{}^*} \mp \psi_m{}^* r_m{}^* \frac{\Phi_m (M_m + M_{m+1})}{b_m \cot\gamma_m{}^* \cos\varepsilon_2{}^*}$$

$$[\sigma_m] \quad = (\Psi_m + \Psi_m{}^*)\, s_m \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot\gamma_m \cos\delta \cos\varepsilon_2} =$$

$$= (\Psi_m + \Psi_m{}^*)\, s_m \frac{P_m + P_{m+1}}{\cot\gamma_m{}^* \sin\delta \cos\varepsilon_2{}^*}.$$

Wir fügen noch eine Uebersicht der Bezeichnungen bei, welche in den vorstehenden Gleichungen vorkommen:

$$\Psi_m = \frac{W_m H_m^* - W_m^* K_m}{H_m H_m^* - K_m^2} \qquad H_m = (e_m + e_m^2)(U_m + V_m) + r_m + s_m$$

$$K_m = s_m - (e_m + e_m^2) V_m$$

$$\Psi_m^* = \frac{W_m^* H_m - W_m K_m}{H_m H_m^* - K_m^2} \qquad H_m^* = (e_m + e_m^2)(U_m^* + V_m) + r_m^* + s_m$$

$$\psi_m^* = \frac{o_m^*}{O_m r_m^* + (e_m + e_m^2) O_m o_m^* + o_m^* r_m^*}$$

$$e_m = \frac{a_m}{a_{m+1}}.$$

$$\Phi_m = \frac{d_m^2 \cos^2 \varepsilon_2^*}{d_m^2 \cos^2 \varepsilon_2^* + 4(1 - \psi_m^* r_m^*) i_m^2}$$

$4 P_m$ = Verticale Componente .... aller Kräfte, welche den Pfeiler oberhalb des $m$ten Feldes beanspruchen.

$2 N_m$ = Moment in Bezug auf $\overline{BB}$.........

$2 M_m$ = „ „ „ „ eine durch A parallel zu $\overline{BB}$ gelegte Gerade.....

(} aller Kräfte, welche den Pfeiler oberhalb des $m$ten Feldes beanspruchen.)

Dritter Theil.

Constructive Aufgaben.

---

§. 1. Die bisher durchgeführten Untersuchungen hatten die Bestimmung der inneren Kräfte zum Gegenstande, welche in Folge einer gegebenen Beanspruchung in einem gegebenen Pfeiler hervorgebracht werden. Wir werden jetzt die in den §§. XV und XXIX vorgebrachten expliciten Ausdrücke für die inneren Kräfte gründlicher discutiren und den Vorgang bei der Berechnung der Querschnitte der Constructionstheile eines Pfeilers auseinandersetzen, bei welchem die Elemente der äusseren Beanspruchung gegeben sind.

Die Grundlage für diese Rechnungsvorgänge ist eine allgemeine Eigenschaft der statisch unbestimmten Systeme, welche lautet:

Zwischen den specifischen Beanspruchungen der Glieder eines statisch unbestimmten Systemes mit k überflüssigen Gliedern bestehen k von den Querschnitten unabhängige Beziehungen[1]).

In der That hat man bei einem Systeme von drei Dimensionen $3n - 6 + k$ Beziehungen, welche die Verlängerungen δ der Stangen in den Functionen der $3n - 6$ Verschiebungen der Knotenpunkte ausdrücken; $3n - 6$ von diesen Beziehungen genügen zur Bestimmung der Verschiebungen in Functionen der δ und die so erhaltenen Werthe müssen auch den k übrig bleibenden Beziehungen genügen, welche sich so in k Beziehungen zwischen den δ, d. h. zwischen den specifischen Beanspruchungen verwandeln.

---

[1]) Levy, Sur la recherche des tensions dans les systèmes de barres. 1874. — Cerruti, Sistemi elastici articolati. Turin, 1873.

Ein statisch unbestimmtes System kann daher im Allgemeinen kein System von gleichem Widerstande sein.

Für den einfachen Pfeiler, mit einer überflüssigen Stange in jedem Felde, hat man auch eine Gleichung zwischen den specifischen Beanspruchungen[1]). Für einen Pfeiler von vier Säulen, mit sechs überflüssigen Gliedern in jedem Felde, muss man daher sechs Gleichungen haben, welche sich aber in Folge der Symmetrie des Systemes auf drei reduciren.

Bei Annahme der geradlinigen Deformation der Säulen, worauf sich die expliciten Ausdrücke für die inneren Kräfte in Folge von [P] gründen, kann man diese Gleichungen zwischen den specifischen Beanspruchungen leicht auf directe Weise nach dem schon früher erwähnten Vorgange auffinden; wir werden aber einen anderen Weg einschlagen, indem wir von den expliciten Ausdrücken selbst ausgehen, und zeigen, wie umgekehrt jene Gleichungen zu diesen Ausdrücken führen.

Wir werden die Aufgabe in ihrer allgemeinen Form für einen Pfeiler mit geneigten Säulen behandeln, indem wir, der Kürze halber, die Zeiger m bei allen Coëfficienten und P weglassen (womit wir auf die Formeln eines Pfeilers mit ähnlichen Feldern reduciren) und den Zeiger m bei den Formeln wieder anwenden, wenn sie sich auf das m^{te} Feld beziehen.

I. Der einfache Pfeiler.

§. 2. Nennen wir R'_1, R'_2, R'_3 die specifischen Beanspruchungen der Säulen, geneigten und horizontalen Stangen, welche durch [P] hervorgerufen werden, unterscheiden wir mit demselben Zeiger die respectiven Elasticitäts-Moduli und setzen ferner

$$\mathsf{g} = \mathsf{Or} + (\mathsf{e} + \mathsf{e}^2)\,\mathsf{Oo} + \mathsf{or},$$

so ergeben sich die Gleichungen:

---

[1]) Diese Gleichungen beziehen sich nur auf die durch [P] hervorgerufenen specifischen Beanspruchungen und nicht auf jene von [Q], bezüglich dessen sich der Pfeiler wie ein statisch bestimmtes System erhält.

$$
\begin{array}{lll}
 & (a) & (b) \qquad\qquad (a) \qquad\qquad (b) \\
 & (1-\psi_{(e)}r)\frac{P}{\cos\varepsilon} = & O\frac{r+(e+e^2)o}{g}\cdot\frac{P}{\cos\varepsilon} = R'_1\Omega = O\frac{R'_1}{E_1\cos^3\varepsilon} \\
(1) & \psi_{(e)}r\frac{P}{\cos\gamma} = & o\frac{r}{g}\cdot\frac{P}{\cos\gamma} = R'_2\omega = o\frac{R'_2}{E_2\cos^3\gamma} \\
 & \psi_{(e)}r\frac{P}{\cot\gamma} = & r\frac{2o}{g}\cdot\frac{P}{\cot\gamma} = R'_3\varrho = \\
 & & = r\left(\frac{2}{1+e}\right)^3\frac{R'_3}{E_3\cot^3\gamma}.
\end{array}
$$

Betrachtet man die in der Form (*b*) geschriebenen Gleichungen (1) und lässt die gemeinsamen Coëfficienten O, o, r weg, so ergibt sich:

$$
(2) \qquad \frac{R'_1}{E_1}(1+\text{tang}^2\varepsilon) = \frac{R'_2}{E_2}(1+\text{tang}^2\gamma) + \frac{R'_3}{E_3}(\text{tang}^2\gamma - \text{tang}^2\varepsilon).
$$

womit die Beziehung zwischen den specifischen Beanspruchungen ausgedrückt ist.

Die drei Gleichungen (1), wenn man O, o, r (oder Ω, ω, ϱ) als Unbekannte betrachtet, sind daher von einander nicht unabhängig, womit die Aufstellung einer neuen willkürlichen Bedingung zwischen diesen Unbekannten erlaubt ist. Als constructive Bedingung ist es entsprechender, die Belastung P zwischen den Säulen und geneigten Stangen zu vertheilen, wobei wir die Vertheilung ausdrücken, indem wir setzen:

$$
(3) \qquad \psi_{(e)}r = \lambda,
$$

worin λ willkürlich ist. Die Gleichungen (1) in der Form (*a*) und (3) bestimmen, daher die Querschnitte Ω, ω, ϱ.

§. 3. Es ist nun interessant zu beachten, wie man aus der Gleichung (2) (welche durch directe geometrische Schlussfolgerungen aufgestellt werden kann) die expliciten Ausdrücke für die inneren Kräfte erhalten kann. Diese Ausdrücke können immer in der Form zusammengefasst werden:

$$
(4) \qquad (1-\lambda)\frac{P}{\cos\varepsilon} = R'_1\Omega \quad \frac{\lambda P}{\cos\gamma} = R'_2\omega \quad \frac{\lambda P}{\cot\gamma} = R'_3\varrho,
$$

worin λ eine jetzt unbekannte Function der Querschnitte, Längen und Elasticitäts-Moduli der Glieder des Pfeilers ist. Bestimmt man die

R'_1, R'_2, R'_3 aus (4) und substituirt dieselben in (2), so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1-\lambda}{O} = \frac{\lambda}{o} + (e + e^2)\frac{\lambda}{r},$$

woraus man erhält:

$$\lambda = \frac{or}{Or + (e + e^2)Oo + or}.$$

Die expliciten Ausdrücke für die inneren Kräfte in Folge von [P] erhält man auf diesem Wege in einfacherer Weise, als aus den Gleichungen, welche die Verschiebungen der Knotenpunkte enthalten.

§. 4. Die Aufgabe der Berechnung eines Pfeilers bezüglich [P] ist somit auf eine passende Wahl des Coëfficienten für die Vertheilung λ und der $E_1 E_2 E_3$, $E'_1 E'_2 E'_3$ reducirt, derart, dass dieselben der Gleichung (2) entsprechen. Wenn dies für andere aufgestellte Bedingungen nicht möglich ist, muss man zu dem Auskunftsmittel greifen, nach welchem ein statisch unbestimmtes System immer durch ein solches von gleichem Widerstande ersetzt werden kann, d. h. man führt künstliche Zugspannungen ein — in unserem Falle gleiche, künstliche Zugspannungen in den horizontalen Stangen. Nennen wir:

β — die effective specifische Verkürzung der horizontalen Stangen, nämlich die Verkürzung, welche man z. B. durch eine Schrauben-Spannvorrichtung hervorbringen kann, unabhängig von der elastischen Verlängerung, welche die Beanspruchung der Stangen hervorbringt.

R''_1 R''_2 R''_3 — die specifischen Beanspruchungen, welche in Folge obiger Verkürzung in den Säulen und Stangen hervorgerufen werden (wobei R''_1 und R''_3 als Zug, R''_2 als Druck positiv ist).

Durch geometrische Betrachtung erhält man die Gleichung:

$$(5)\qquad \frac{R''_1}{E_1}(1 + \text{tang}^2\,\varepsilon) = -\frac{R''_2}{E_2}(1 + \text{tang}^2\,\gamma) + \\ + \left(\beta - \frac{R''_3}{E_3}\right)(\text{tang}^2\,\gamma - \text{tang}^2\,\varepsilon).$$

Subtrahirt man (5) von (2) und setzt:

$$R'_1 - R''_1 = R_1 \qquad R'_2 + R''_2 = R_2 \qquad R'_3 + R''_3 = R_3,$$

so erhält man:

$$(6) \qquad \frac{R_1}{E_1}(1 + \text{tang}^2 \varepsilon) = \frac{R_2}{E_2}(1 + \text{tang}^2 \gamma) + \\ + \left(\frac{R_3}{E_3} - \beta\right)(\text{tang}^2 \gamma - \text{tang}^2 \varepsilon).$$

Wir können jetzt irgend eine willkürliche Bedingung bezüglich der effectiven, specifischen Beanspruchungen $R_1\, R_2\, R_3$ aufstellen und aus (6) die Werthe von β bestimmen, welche dem Systeme von Beanspruchungen entsprechen.

Bei Annahme von homogenem Materiale und mit der Bedingung des gleichen Widerstandes $R_1 = R_2 = R_3 = \mathfrak{R}$ ergibt (6):

$$\beta = \frac{2\mathfrak{R}}{E},$$

d. h. die effective specifische Verkürzung β muss gleich sein der doppelten elastischen Verkürzung, welche durch eine specifische Kraft gleich $\mathfrak{R}$ hervorgerufen würde.

Die Querschnitte berechnet man aus (4), indem man $R_1\, R_2\, R_3$ für $R'_1\, R'_2\, R'_3$ setzt.

§. 5. Wenn die Beanspruchungen [P] und [Q] gleichzeitig wirken, kann man auch dieselbe Methode zur Bestimmung der Querschnitte beibehalten, indem man aber solche Werthe für $R_1 R_2 R_3$ wählt, dass die specifische Maximalbeanspruchung, wenn man zu [P] noch [Q] beifügt, nicht die Grenze der permanenten Belastungen überschreite, wobei wir mit $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3$ die Werthe für die verschiedenen Glieder benennen. Die durch diese Bedingung ausgedrückten Formeln (das System als gelenkig betrachtet) sind:

$$R_1 + \frac{M_m}{d_m \cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{\Omega} \leqq \mathfrak{R}_1 \quad R_2 + \frac{N_m}{D_m \cos \gamma} \cdot \frac{1}{\omega} \leqq \mathfrak{R}_2 \quad R_3 \leqq \mathfrak{R}_3,$$

woraus man, Ω und ω aus (4) substituirt, erhält:

$$(7) \quad R_1 \leqq \frac{\mathfrak{R}_1}{1 + \frac{M_m}{(1-\lambda) P d_m}} \qquad R_2 \leqq \frac{\mathfrak{R}_2}{1 + \frac{N_m}{\lambda P D_m}} \qquad R_3 \leqq \mathfrak{R}_3.$$

Die (6) und (7) bestimmen daher die Wahl der Grössen $E_1 E_2 E_3$, $R_1 R_2 R_3$, λ, β.

Der bessere Vorgang ist, einen entsprechenden Werth für λ aufzustellen (zwischen 0,05 und 0,10), aus (7) die oberen Grenzen der Werthe R zu bestimmen und mit (6) zu versuchen, ob eine passende Wahl für diese Werthe ohne Einführung von künstlichen Zugspannungen, d. h. für $\beta = 0$, möglich ist. Im entgegengesetzten Falle bestimmt man β, nach Einsetzung der passenden Werthe von R in (6).

Nachdem in dieser Weise die Querschnitte der Glieder des Pfeilers berechnet sind, wird es gut sein, die Stabilität mittelst den in der vorhergehenden Abhandlung vorgebrachten strengen Formeln zu untersuchen, speciell bezüglich des Einflusses der Befestigung der Knotenpunkte o und n auf die Beanspruchung der Stangen der äussersten Felder.

Zahlenbeispiel.

Wir machen jetzt eine numerische Anwendung der obigen Formeln auf die Berechnung eines Pfeilers, wobei wir zuerst [P] allein und dann [P] und [Q] zusammen berücksichtigen.

1. Es sei ein Pfeiler in Bezug auf [P] mit den Angaben zu berechnen:

$$\text{tang } \varepsilon = {}^1/_8 \qquad \text{tang } \gamma = 1 \qquad \text{daher } \varepsilon = 7^0\ 7'\ 30'' \qquad \gamma = 45^0.$$

Mit diesen Angaben wird (6):

$$(6)(1) \qquad 1{,}016 \frac{R_1}{E_1} = 2 \frac{R_2}{E_2} + 0{,}984 \left(\frac{R_3}{E_3} - \beta\right).$$

a) Für die Annahme von homogenem Materiale, d. h. $E_1 = E_2 = E_3$, ist es leicht zu constatiren, dass (6)(1) die Wahl von passenden Werthen für die R ohne Einführung künstlicher Zugspannungen nicht zulässt. Setzt man z. B. $R_1 = 8$, $R_2 = 6$, $R_3 = 8$ und $E = 20\,000$ pr. mm^2, so resultirt als specifische Verkürzung der horizontalen Stangen:

$$\beta = 0{,}595 \; mm \text{ pr. } m.$$

b) Setzt man dagegen die Säulen aus Gusseisen und das Gitterwerk aus Eisen voraus, so sind keine künstlichen Zugspannungen nothwendig. Setzt man thatsächlich $E_3 = E_2 = 2 E_1$ und $\beta = 0$ so wird der (6)(1) durch $R_1 = 8$, $R_2 = 4{,}2$, $R_3 = 8$ entsprochen.

Der Werth für R_2 ist fast zu niedrig, doch muss man den kleinen Querschnitt berücksichtigen, welchen die geneigten Stangen im Verhältnisse zu ihrer Länge, besonders in den unteren Feldern, erhalten.

2. Wenn wir dagegen, $\varepsilon = 7^0\ 7'\ 30''$ beibehalten, $\gamma = 30^0$ wählen, wird (6):

$$(6)(2) \qquad 1{,}016 \frac{R_1}{E_1} = 1{,}333 \frac{R_2}{E_2} + 0{,}318 \left(\frac{R_3}{E_3} - \beta\right).$$

a) Homogenes Material vorausgesetzt, können wir in diesem Falle ohne Einführung von künstlichen Zugspannungen passende Werthe für R wählen, nachdem für $\beta = 0$ der Gleichung (6)$_{2)}$ durch $R_1 = 8$, $R_2 = 4{,}19$, $R_3 = 8$ entsprochen wird.

b) Die Säulen aus Gusseisen angenommen, ergibt für die geneigten Stangen, bei der Annahme $\beta = 0$, zu grosse Werthe. Substituirt man z. B. $R_1 = 6$, $R_3 = 10$, so ergibt sich $R_2 = 6{,}76$; dieser Werth für R_2 kann nur durch Vergrösserung von R_3 und durch Verminderung von R_1 verkleinert werden, was ohne Einführung künstlicher Zugspannungen zu unpassenden Werthen führt.

Will man nicht zu diesem Auskunftsmittel greifen, so muss man für Säulen aus Gusseisen $\gamma = 45^0$ und für solche aus Eisen $\gamma = 30^0$ wählen.

3. Mit Beibehaltung der früheren geometrischen Daten werden wir alle Querschnitte der Glieder eines Pfeilers mit fünf Feldern berechnen und denselben von $2\,P = 200\,000$ *kg* $2\,Q = 30\,000$ *kg* beansprucht annehmen.

Wir setzen gleiches Material voraus und führen keine künstlichen Zugspannungen ein, setzen also $\beta = 0$.

Bestimmen wir in erster Linie mittelst (7) die oberen Grenzen von R_1 und R_2 für die verschiedenen Felder und verschiedene Werthe von λ, und wählen wir dann für jedes Feld die Werthe von λ, R_1 R_2 R_3 mit Berücksichtigung von (6). Für die Säulen behalten wir $\mathfrak{R}_1$ constant bei und nehmen dagegen die Werthe von $\mathfrak{R}_2$ abnehmend für die unteren Felder an, indem wir hiermit die grössere Länge der geneigten Stangen in den unteren Feldern berücksichtigen. Beachtet man:

$$\frac{M_m}{d_m} = \frac{Q}{\operatorname{tang} \varepsilon}\left(1 - \frac{e^{m-1} + e^m}{2}\right) \qquad \frac{N_m}{D_m} = \frac{Q}{\operatorname{tang} \varepsilon} \cdot \frac{e^{m-1} - e^m}{2}$$

und dass mit den gegebenen Daten $e = 0{,}641$, so erhält man aus (7):

$\mathfrak{R}_1 = 8$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$\lambda =$
$R_1 \leqq$	6,22	5,02	4,37	4,03	3,83	0,05
„	6,20	5,00	4,35	4,01	3,81	0,06
„	6,18	4,98	4,33	3,99	3,79	0,07
„	6,16	4,96	4,31	3,97	3,77	0,08
„	6,14	4,94	4,29	3,95	3,75	0,09
„	6,12	4,92	4,27	3,93	3,73	0,10

	$m = 1$ $\mathfrak{R}_2 = 6{,}5$	$m = 2$ $\mathfrak{R}_2 = 5$	$m = 4$ $\mathfrak{R}_2 = 4$	$m = 4$ $\mathfrak{R}_2 = 3$	$m = 5$ $\mathfrak{R}_2 = 2{,}5$	$\lambda =$
$R_2 \leqq$	1,14	1,33	1,24	1,43	1,44	0,05
„	1,40	1,51	1,61	1,54	1,54	0,06
„	1,60	1,68	1,72	1,65	1,63	0,07
„	1,77	1,83	1,90	1,75	1,71	0,08
„	1,91	1,97	2,01	1,83	1,77	0,09
„	2,03	2,10	2,12	1,91	1,83	0,10

Mit Berücksichtigung von $(6)_{(2)}$ und $\beta = 0$ gesetzt, können wir folgende Tabelle der Werthe bestimmen:

	$m = 1$ $\lambda = 0{,}10$	$m = 2$ $\lambda = 0{,}09$	$m = 3$ $\lambda = 0{,}07$	$m = 4$ $\lambda = 0{,}06$	$m = 5$ $\lambda = 0{,}05$
$R_1 = kg$	6,12	4,94	4,83	4,01	3,83
$R_2 =$ „	2,03	1,97	1,72	1,54	1,44
$R_3 =$ „	9,03	7,52	6,63	6,36	6,20

und schliesslich erhalten wir aus (4):

	$m = 1$ $\lambda = 0{,}10$	$m = 2$ $\lambda = 0{,}09$	$m = 3$ $\lambda = 0{,}07$	$m = 4$ $\lambda = 0{,}06$	$m = 5$ $\lambda = 0{,}05$
$\Omega = cm^2$	148,2	185,65	214,12	236,24	249,97
$\omega =$ „	56,88	52,75	47,00	45,00	40,10
$\varrho =$ „	6,39	6,91	6,10	5,45	4,66

Nachdem alle diese Rechnungen von der absoluten Grösse des Pfeilers unabhängig sind, haben wir nur die Werthe von γ und ε angegeben.

II. Der pyramidale Pfeiler.

§. 6. Vor Allem stellen wir die Form auf, welche die Coëfficienten $\Psi_{(e)}$ und $\Psi_{(e)}^*$ annehmen, wenn man U, V, W in Functionen der reducirten Querschnitte ausdrückt.

Setzt man: (8)
$$G = O\Big([r + (e + e^2)\,o]\,[r^* + (e + e^2)\,o^*] + s\,[r + r^* + (e + e^2)(o + o^*)]\Big) + o\,r\,[r^* + (e + e^2)\,o^*] + s\,[(r + r^*)(o + o^*) + 4(e + e^2)\,o\,o^*] + o^*r^*[r + (e + e^2)\,o]$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Psi_{(e)} &= \frac{1}{G}\Big(o\,[r^* + (e + e^2)\,o^*] + s\,(o - o^*)\Big) \\ \Psi^*_{(e)} &= \frac{1}{G}\Big(o^*[r + (e + e^2)\cdot o] + s\,(o^* - o)\Big). \end{aligned} \quad (9)$$

Nennen wir $R'_1 R'_2 R'^*_2 R'_3 R'^*_3 R'_4$ die von [P] erzeugten specifischen Beanspruchungen der Säulen, der geneigten, horizontalen und inneren diagonalen Stangen, und unterscheiden wir ferner mit denselben Zeigern die relativen Elasticitäts-Moduli, so werden die expliciten Ausdrücke für die inneren Kräfte durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\overset{(a)}{\left[1-\Psi_{(e)}\mathrm{r}-\Psi_{(e)}{}^{*}\mathrm{r}^{*}-2\left(\Psi_{(e)}+\Psi_{(e)}{}^{*}\right)\mathrm{s}\right]}\frac{\mathrm{P}}{\cos\varepsilon_1}=$$

$$=\frac{\mathrm{O}}{\mathrm{G}}\Big(\overset{(b)}{[\mathrm{r}+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}][\mathrm{r}^*+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}^*]+\mathrm{s}[\mathrm{r}+\mathrm{r}^*+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)(\mathrm{o}+\mathrm{o}^*)]}\Big)\frac{\mathrm{P}}{\cos\varepsilon_1}=\overset{(a)}{\mathrm{R}'_1\,\Omega}=\overset{(b)}{\mathrm{O}\,\frac{\mathrm{R}'_1}{\mathrm{E}_1\cos^3\varepsilon_1}}$$

$$[\Psi_{(e)}\mathrm{r}+(\Psi_{(e)}+\Psi_{(e)}{}^{*})\mathrm{s}]\frac{\mathrm{P}}{\cos\gamma\cos\varepsilon_2}=$$

$$=\frac{\mathrm{o}}{\mathrm{G}}\Big((\mathrm{r}+\mathrm{s})[\mathrm{r}^*+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}^*]+\mathrm{s}[\mathrm{r}+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}^*]\Big)\frac{\mathrm{P}}{\cos\gamma\cos\varepsilon_2}=\mathrm{R}'_2\,\omega=\mathrm{o}\,\frac{\mathrm{R}'_2}{\mathrm{E}_2\cos^3\gamma\cos^3\varepsilon_2}$$

$$[\Psi_{(e)}{}^{*}\mathrm{r}^*+(\Psi_{(e)}+\Psi_{(e)}{}^{*})\mathrm{s}]\frac{\mathrm{P}}{\cos\gamma^*\cos\varepsilon_2{}^*}=$$

$$=\frac{\mathrm{o}^*}{\mathrm{G}}\Big((\mathrm{r}^*+\mathrm{s})[\mathrm{r}+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}]+\mathrm{s}[\mathrm{r}^*+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}]\Big)\frac{\mathrm{P}}{\cos\gamma^*\cos\varepsilon_2{}^*}=\mathrm{R}_2{}^{*\prime}\,\omega^*=\mathrm{o}^*\,\frac{\mathrm{R}_2{}^{*\prime}}{\mathrm{E}_2{}^*\cos^3\gamma^*\cos^3\varepsilon_2{}^*}$$

$$(10)\qquad \Psi_{(e)}\mathrm{r}\,\frac{2\mathrm{P}}{\cot\gamma\cos\varepsilon_2}=$$

$$=\frac{2\mathrm{r}}{\mathrm{G}}\Big(\mathrm{o}[\mathrm{r}^*+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}^*]+\mathrm{s}(\mathrm{o}-\mathrm{o}^*)\Big)\frac{\mathrm{P}}{\cot\gamma\cos\varepsilon_2}=\mathrm{R}'_3\,\varrho=\mathrm{r}\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}}\right)^3\frac{\mathrm{R}'_3}{\mathrm{E}_3\cot^3\gamma\cos^3\varepsilon_2}$$

$$\Psi_{(e)}{}^{*}\mathrm{r}^*\,\frac{2\mathrm{P}}{\cot\gamma^*\cos\varepsilon_2{}^*}=$$

$$=\frac{2\mathrm{r}^*}{\mathrm{G}}\Big(\mathrm{o}^*[\mathrm{r}+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}]+\mathrm{s}(\mathrm{o}^*-\mathrm{o})\Big)\frac{\mathrm{P}}{\cot\gamma^*\cos\varepsilon_2{}^*}=\mathrm{R}_3{}^{*\prime}\,\varrho^*=\mathrm{r}^*\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}}\right)^3\frac{\mathrm{R}_3{}^{*\prime}}{\mathrm{E}_3{}^*\cot^3\gamma^*\cos^3\varepsilon_2{}^*}$$

$$(\Psi_{(e)}+\Psi_{(e)}{}^{*})\,\mathrm{s}\,\frac{2\mathrm{P}}{\cot\gamma\cos\delta\cos\varepsilon_2}=$$

$$=\frac{2\mathrm{s}}{\mathrm{G}}\Big(\mathrm{o}[\mathrm{r}^*+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}^*]+\mathrm{o}^*[\mathrm{r}+(\mathrm{e}+\mathrm{e}^2)\mathrm{o}]\Big)\frac{\mathrm{P}}{\cot\gamma\cos\delta\cos\varepsilon_2}=\mathrm{R}'_4\,\sigma=\mathrm{s}\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}}\right)^3\frac{\mathrm{R}'_4}{\mathrm{E}_4\cot^3\gamma\cos^3\delta\cos^3\varepsilon_2}$$

Wenn man (10) in der Form (*b*) betrachtet, die gemeinschaftlichen Factoren O, o, o*, r, r*, s weglässt, die bestehenden Beziehungen zwischen den Winkeln berücksichtigt, und die 1. 2. 4., dann 1. 3. 5. und 4. 5. 6. combinirt, erhält man die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{R'_1}{E_1}(1+\tan^2\varepsilon) = \frac{R'_2}{E_2}(1+\tan^2\gamma) + \frac{R_3'}{E_3}(\tan^2\gamma - \tan^2\varepsilon) \\
(11)\quad &\frac{R'_1}{E_1}(1+\tan^2\varepsilon^*) = \frac{R_2^{*\prime}}{E_2{}^*}(1+\tan^2\gamma^*) + \frac{R_3^{*\prime}}{E_3{}^*}(\tan^2\gamma^* - \tan^2\varepsilon^*) \\
&\frac{R'_4}{E_4} = \frac{R'_3}{E_3}\cos^2\delta + \frac{R_3^{*\prime}}{E_3{}^*}\sin^2\delta,
\end{aligned}
$$

welche die drei Beziehungen zwischen den specifischen Beanspruchungen ausdrücken, auf welche wir im Anfange hingewiesen haben. Man bemerkt, dass die beiden ersten (11) mit (2) ganz identisch sind.

Von den sechs Gleichungen (10), wenn man selbe als solche zwischen den Unbekannten O, o, o*, r, r*, s betrachtet, sind nur drei von einander unabhängig, was uns die Einführung von drei willkürlichen Bedingungen in Bezug auf dieselben Unbekannten erlaubt. Die entsprechenderen constructiven Bedingungen sind auch in diesem Falle jene, welche die Vertheilung der Belastung P zwischen den Säulen und Stangen bestimmen. Diese Vertheilung ist definirt, indem man setzt:

$$
(12)\qquad (\Psi_{(e)} + \Psi_{(e)}{}^*)\,s = \lambda_1 \qquad \Psi_{(e)}\,r = \lambda_2 \qquad \Psi_{(e)}{}^*\,r^* = \lambda_2{}^*,
$$

worin λ_1, λ_2, $\lambda_2{}^*$ willkürliche Grössen sind. Die (10) bestimmen daher die Querschnitte in der Form:

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
R'_1\Omega &= (1-2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_2{}^*)\frac{P}{\cos\varepsilon_1} & R'_3\varrho &= 2\lambda_2\frac{P}{\cot\gamma\cos\varepsilon_2} \\
R'_2\omega &= (\lambda_1+\lambda_2)\frac{P}{\cos\gamma\cos\varepsilon_2} & R_3^{*\prime}\varrho^* &= 2\lambda_2{}^*\frac{P}{\cot\gamma^*\cos\varepsilon_2{}^*} \\
R_2^{*\prime}\omega^* &= (\lambda_1+\lambda_2{}^*)\frac{P}{\cos\gamma^*\cos\varepsilon_2{}^*} & R'_4\sigma &= 2\lambda_1\frac{P}{\cot\gamma\cos\delta\cos\varepsilon_2}
\end{aligned}
$$

während die R'_i und $R_i^{*\prime}$ (11) genügen müssen.

Bevor wir weitergehen, wollen wir auch in diesem Falle darauf hinweisen, wie die (11) zu den expliciten Ausdrücken für die inneren Kräfte führen können. Es ist klar, dass wir immer annehmen können, dass diese Kräfte von der Form der zweiten Glieder von (13) seien (denn [13] genügt allen Gleichgewichts-Gleichungen), wenn man die Coëfficienten λ als unbekannte Functionen der Querschnitte, Längen etc. der Glieder des Pfeilers beibehält. Zur Bestimmung der λ substituirt man die R_i und R_i^* aus (13) in (11) und erhält das folgende System von Gleichungen:

$$\frac{\lambda_1}{s} = \frac{\lambda_2}{r} + \frac{\lambda_2^*}{r^*}$$

$$\frac{1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_2^*}{O} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{o} + (e + e^2)\frac{\lambda_2}{r}$$

$$\frac{1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_2^*}{O} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2^*}{o^*} + (e + e^2)\frac{\lambda_2^*}{r^*},$$

welchem die Werthe (12) von $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_2^*$ identisch genügen, mit Berücksichtigung von (8) und (9). Die expliciten Ausdrücke für die Beanspruchungen können auf diese Weise direct aufgestellt werden.

§. 8. Die Berechnung eines Pfeilers bezüglich der Inanspruchnahme [P] ist somit auf die passende Wahl von $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_2^*$, $E_i\ E_i^*$, $R'_i\ R_i^{*\prime}$ reducirt, letztere derart, dass selbe (11) entsprechen. Bei der Wahl dieser Grössen beachten wir Folgendes:

a) Für die Stangen des Gitterwerkes ist gleiches Material verwendet, und für die äusseren horizontalen Stangen bestehe die Bedingung: $R'_3 = R_3^{*\prime}$; bei dieser Annahme ergibt (11) 3.: $R'_4 = R'_3 = R_3^{*\prime}$, d. h. die specifischen Beanspruchungen für die sechs horizontalen Stangen sind gleich. Die vorstehende Bedingung ist aber nicht vereinbar mit $R_2^{*\prime} = R'_2$;

b) eine zweite Bedingung, deren Einführung von Nutzen sein kann, ist $\lambda_2 = \lambda_2^*$, welche besagt, dass die Resultirende der inneren Kräfte der geneigten Stangen, welche in einem Knotenpunkte zusammenlaufen, auf der Diagonalebene des Pfeilers liegt. Die Bedingung: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_2^*$ würde die Vertheilung der inneren Kräfte zwischen den

sechs horizontalen Stangen in der Weise feststellen, dass die Beanspruchung einer inneren Diagonale gleich ist der Resultirenden der Beanspruchungen von zwei äusseren horizontalen Stangen.

Die Wahl der willkürlichen Bedingungen für das Uebrige erfordert in jedem besonderen Falle specielles Studium.

§. 9. Auch der Pfeiler mit vier Säulen kann nur dann ein System von gleichem Widerstande in Bezug auf [P] bilden, wenn man künstliche Zugspannungen in den horizontalen Stangen einführt. Nennen wir:

β, β^*, χ — die effectiven specifischen Verkürzungen der äusseren horizontalen und inneren diagonalen Stangen;

R_i'', $R_i^{*''}$ — die Spannungen, welche in Folge der besagten Verkürzungen in den verschiedenen Gliedern des Pfeilers hervorgerufen werden, wobei R_2'' $R_2^{*''}$ als Drücke und R_1'' R_3'' $R_3^{*''}$ R_4 als Züge betrachtet sind.

Durch geometrische Schlussfolgerungen gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$\frac{R_4''}{E_4} = \chi - \left(\beta - \frac{R_2''}{E_3}\right) \cos^2 \delta - \left(\beta^* - \frac{R_3^{*''}}{E_3^*}\right) \sin^2 \delta.$$

$$(14) \quad \frac{R_1''}{E_1}(1 + \text{tang}_2\, \varepsilon) = - \frac{R_2''}{E_2}(1 + \text{tang}^2 \gamma) + \\ + \left(\beta - \frac{R_3''}{E_3}\right)(\text{tang}^2 \gamma - \text{tang}^2 \varepsilon)$$

$$\frac{R_1''}{E_1}(1 + \text{tang}^2 \varepsilon^*) = - \frac{R_2^{*''}}{E_2^*}(1 + \text{tang}^2 \gamma^*) + \\ + \left(\beta^* - \frac{R_3^{*''}}{E_3^*}\right)(\text{tang}^2 \gamma^* - \text{tang}^2 \varepsilon^*).$$

Combinirt man (14) und (11) durch Subtrahirung der ersten Gleichungen und Summirung der zweiten und dritten, setzt man ferner:

$$R_1' - R_1'' = R_1 \text{ und für die übrigen Glieder:}$$

$$R_i' + R_i'' = R_i \quad R_i^{*'} + R_i^{*''} = R_i^*,$$

so erhält man:

$$\frac{R_4}{E_4} = \chi + \left(\frac{R_3}{E_3} - \beta\right) \cos^2 \delta + \left(\frac{R_3^*}{E_3^*} - \beta^*\right) \sin^2 \delta.$$

$$(15) \quad \frac{R_1}{E_1} (1 + \operatorname{tang}^2 \varepsilon) = \frac{R_2}{E_2} (1 + \operatorname{tang}^2 \gamma) + \\ + \left(\frac{R_3}{E_3} - \beta\right) (\operatorname{tang}^2 \gamma - \operatorname{tang}^2 \varepsilon)$$

$$\frac{R_1}{E_1} (1 + \operatorname{tang}^2 \varepsilon^*) = \frac{R_2^*}{E_2^*} (1 + \operatorname{tang}^2 \gamma^*) + \\ + \left(\frac{R_3^*}{E_3^*} - \beta^*\right) (\operatorname{tang}^2 \gamma^* - \operatorname{tang}^2 \varepsilon^*).$$

Wir können nun irgend ein System von Werthen für die effectiven specifischen Spannungen R_i und R_i^* wählen und aus (15) die correspondirenden Werthe von β, β^*, χ bestimmen.

Unter der Voraussetzung von gleichem Material ist die Bedingung des gleichen Widerstandes $R_i = R_i^* = \mathfrak{R}$ erfüllt durch:

$$\beta = \beta^* = \chi = \frac{2\mathfrak{R}}{E}.$$

§. 10. Wenn die beiden Beanspruchungen [P] und [Q] gleichzeitig wirken, kann man (13) zur Bestimmung der Querschnitte verwenden, indem man aber für R_i und R_i^* solche Werthe wählt, dass dieselben die durch die folgenden Ungleichungen bestimmten Grenzen nicht überschreiten:

$$R_1 + (1 - \psi_{(e)}^* r^*) \frac{M_m}{d_m \cos \varepsilon_1} \cdot \frac{1}{\Omega} \leqq \mathfrak{R}_1$$

$$R_2^* + \psi_{(e)}^* r^* \frac{M_1}{d_m \cos \gamma^* \cos \varepsilon_2^*} \cdot \frac{1}{\omega^*} \leqq \mathfrak{R}_2^*$$

$$R_2 + \frac{N_m}{D_m \cos \gamma \cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{\omega} \leqq \mathfrak{R}_2 \qquad R_3 \leqq \mathfrak{R}_3$$

$$R_3^* + \psi_{(e)}^* r^* \frac{M_m + M_{m+1}}{b_m \cot \gamma^* \cos \varepsilon_2^*} \cdot \frac{1}{\varrho^*} \leqq \mathfrak{R}_3^* \qquad R_4 \leqq \mathfrak{R}_4$$

substituirt man Ω, ω, ω^*, ϱ^* aus (13), so ergibt sich:

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
R_1 &\leqq \frac{\mathfrak{R}_1}{1+\dfrac{1-\psi_{(e)}{}^{*}r^{*}}{1-2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_2{}^{*}}\cdot\dfrac{M_m}{P_m d_m}} \\
R_2{}^{*} &\leqq \frac{\mathfrak{R}_2{}^{*}}{1+\dfrac{\psi_{(e)}{}^{*}r^{*}}{\lambda_1+\lambda_2{}^{*}}\cdot\dfrac{M_m}{P_m d_m}} \\
R_2 &\leqq \frac{\mathfrak{R}_2}{1+\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\dfrac{N_m}{P_m D_m}} \qquad R_3 \leqq \mathfrak{R}_3 \\
R_3{}^{*} &\leqq \frac{\mathfrak{R}_3{}^{*}}{1+\dfrac{\psi_{(e)}{}^{*}r^{*}}{\lambda_2{}^{*}}\cdot\dfrac{M_m+M_{m+1}}{2P_m b_m}} \qquad R_4 \leqq \mathfrak{R}_4.
\end{aligned}
$$

Die Anwendung von (16) bietet nur die eine Schwierigkeit, dass der Ausdruck $\psi_{(e)}{}^{*}r^{*}$ in den Nennern der zweiten Glieder die Verhältnisse der Querschnitte und daher die Grössen R und λ in impliciter Form enthält. Man kann trotzdem annäherungsweise vorgehen, wenn man beachtet, dass $\psi_{(e)}{}^{*}r^{*}$ einen zu λ_i sehr angenäherten Werth besitzt; wenn man sich z. B. die inneren Diagonalstangen weggenommen denkt, daher $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \lambda_2{}^{*}$ setzt, so erhält man $\psi_{(e)}{}^{*}r^{*} = \dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}$, einen zu λ_2 sehr angenäherten Werth, nachdem λ_2 ein sehr kleiner Bruch ist. Substituirt man also in (16) für die erste Annäherung die Einheit für das Verhältniss $\dfrac{\psi_{(e)}{}^{*}r^{*}}{\lambda_i}$, so können wir angenäherte Werthe von R bestimmen, und daher mit genügender Annäherung $\psi_{(e)}{}^{*}r^{*}$, welch' letzteres übrigens keinen grossen Einfluss in (16) hat.

Natürlich muss die Wahl von R_i und $R_i{}^{*}$ mit Berücksichtigung von (15) und wenn möglich für $\beta = \beta^{*} = \chi = 0$ durchgeführt werden, d. h. ohne Einführung von künstlichen Zugspannungen. Sollte dies nicht möglich sein, so wird man nach Feststellung von R_i und $R_i{}^{*}$ die Werthe β, β^{*}, χ aus (15) bestimmen.

Die numerische Ausführung solcher Berechnungen bietet keine Schwierigkeiten.

Anhang.

Einfacher, verticaler Pfeiler mit horizontalen, fest eingefügten Stangen.

Ein Capitel.

Inanspruchnahme auf Umstürzen.

§. 1. Allgemeines.

Die sehr interessante Aufgabe des Gleichgewichtes eines Pfeilers mit horizontalen, in den Säulen fest eingefügten Stangen kann in ziemlich einfacher Weise durchgeführt werden, indem man die für das Studium des Pfeilers mit in den Knotenpunkten gelenkigen Stangen angewandten Methoden verallgemeinert. Wir werden uns hier nur auf die Behandlung der Aufgabe für einen einfachen Pfeiler mit verticalen Säulen beschränken, nachdem man die hierbei aufgestellten Grundsätze auch für complicirtere Typen anwenden kann.

Wir werden annehmen, dass der Pfeiler besteht (Fig. 27, Taf. VII):

a) aus zwei continuirlichen, elastischen Säulen, welche unten in einer Ebene und oben im beweglichen, aber nicht deformirbaren Pfeilerkopfe befestigt sind;

b) aus elastischen, horizontalen Stangen oder Traversen, welche in gleichen Zwischenräumen angeordnet und in die Säulen fest gefügt sind;

c) aus geneigten, in den Knotenpunkten gelenkigen Stangen (jene sind gleichzeitig die Verbindungspunkte der horizontalen Stangen mit den Säulen), welche das Schema des Andreas-Kreuzes vervollständigen.

Das Studium der Inanspruchnahme auf Zerknicken eines ähnlichen Systemes bietet vom praktischen Gesichtspunkte aus kein Interesse, weshalb wir uns damit auch nur nebenbei beschäftigen werden. In Anbetracht der Dimensionen, welche man den Gliedern eines Pfeilers von diesem Typ gibt, kann man annehmen, dass die horizontalen Verschiebungen der Säulen in Folge der Beanspruchung [P] Null sind; wie auch, dass die Beanspruchung der m^{ten} Säulentheile allein der P_m das Gleichgewicht halten, wenn man die geringe Inanspruchnahme der geneigten Stangen vernachlässigt, welche als eigentliche Zugstangen nur bestimmt sind, unter der Einwirkung von [Q] auf Zug zu arbeiten, und zu diesem Zwecke künstlich gespannt werden können, um ein regelmässiges Functioniren zu sichern.

Viel interessanter ist das Studium der Beanspruchung auf Umstürzen, gegen welches diese specielle Anordnung des Gitterwerkes zu wirken bestimmt ist.

In Folge der Inanspruchnahme [Q] biegen sich die Säulen seitlich, indem selbe mit sich die horizontalen, eingefügten Stangen biegen (Fig. 28), die mit einem Momente reagiren, welches eine Unstetigkeit in dem Gesetze der Variation der Biegungsmomente der Säulen hervorruft (Fig. 29) und die Säulenachsen nach einer schlangenförmigen Linie deformirt; hierbei befinden sich die Säulen unter derselben Bedingung wie ein continuirlicher Balken, welcher auf elastischen, in verschiedenen Höhen gelegenen Stützen fest eingefügt ist.

Der totale Widerstand des Pfeilers gegen Umstürzen setzt sich daher zusammen:

a) aus dem Widerstande gegen Zug oder Druck der Säulen, Stangen oder geneigten Zugstangen;

b) aus dem Widerstande gegen Biegung der Säulen und eingefügten horizontalen Stangen.

Die constructive Aufgabe kann folglich in folgender Form gestellt werden: Es sind die Constanten der verschiedenen Elemente des Widerstandes auf Umstürzen derart zu bestimmen, dass [Q] gleiche specifische Maximal-Spannungen in den verschiedenen beanspruchten Theilen hervorbringt, d. h.

derart, dass die verschiedenen Elemente des Widerstandes mit derselben Deformation in entsprechender Weise functioniren.

Es ist thatsächlich wenig rationell, in irgend einem Systeme Widerstandselemente anzuhäufen, welche, obiger Bedingung nicht entsprechend, unter der Einwirkung der äusseren Inanspruchnahme allein und nacheinander zerstört werden.

Um einen bestimmten Fall zu betrachten, würde es wenig nützen, die horizontalen Stangen fest einzufügen, wenn das so erhaltene Element des Widerstandes nicht mit fühlbarer Wirkung in's Spiel käme, wie bei einem Bruche der geneigten Stangen, unter welcher Annahme dasselbe ungenügend sein könnte, um allein der Inanspruchnahme auf Umstürzen das Gleichgewicht zu halten.

Einer solchen Gefahr sind, bei unpassenden Dimensionen der Theile, die Pfeiler mit fest eingefügten horizontalen Gliedern ausgesetzt, bei welchen als erste Ursache des Zusammensturzes gewöhnlich ein Bruch einer geneigten Stange wirkt.

§. 2. Fundamental-Lehrsatz.

Wir werden die Aufgabe auf Grund der Voraussetzung durchführen, dass in den geneigten Stangen wirklich jene Spannung hervorgerufen wird, welche mit ihrer Längenänderung correspondirt, d. h. dass den Stangen eine solche Zugspannung vom Anfange an gegeben ist, dass die Biegung in Folge des durch [Q] bewirkten Druckes in denselben verhindert wird.

Mit dieser Annahme können wir den im §. 2 für den gewöhnlichen Pfeiler vorgebrachten Fundamental-Lehrsatz auch für den Pfeiler mit horizontalen, fest eingefügten Gliedern erweitern.

Die Richtigkeit des ersten Theiles des Lehrsatzes kann man mit einer Reihe von Betrachtungen beweisen, parallel mit der analytischen Behandlung der §. 4 und 6, welche wir aber der grösseren Deutlichkeit halber kurz zusammenfassen werden, indem wir den allgemeinen Vorgang für das Studium der Beanspruchung [P] anzeigen.

Die Richtigkeit des zweiten Theiles des Lehrsatzes ist auch in diesem Falle wegen der Symmetrie klar.

Wir werden ganz dieselben Bezeichnungen wie für den gewöhnlichen Pfeiler gebrauchen, und führen nur für die Unstetigkeit der Biegungsmomente analoge Bezeichnungen ein mit jenen, welche wir bei dem Studium des continuirlichen eingespannten Balkens auf elastischen Stützen angewendet haben. (Einleitung III und IV.)

Wir werden daher nennen:

$\dot{\mu}'_m\ \dot{\mu}''_m\ \ddot{\mu}'_m\ \ddot{\mu}''_m$ — die Biegungsmomente in den beiden Säulen oberhalb und unterhalb des eingefügten Querschnittes der m^{ten} horizontalen Stange.

$$\left.\begin{array}{l} \nu'_m = \dot{\mu}'_m - \ddot{\mu}'_m \\ \nu''_m = \dot{\mu}''_m - \ddot{\mu}''_m \end{array}\right\}$$ die beiden Biegungsmomente, welche an den Endquerschnitten der m^{ten} horizontalen Stange wirken.

Y, y — das Trägheitsmoment und den Trägheitsradius (constant) der horizontalen eingefügten Stangen.

Wenn wir (A) (Einleitung III) auf das Studium der Biegung der m^{ten} und $m + 1^{\text{ten}}$ Säulentheile anwenden, so ergeben sich, wenn man auf die allgemeine Form reducirt und zur Vermeidung von unnöthigen Complicationen der Bezeichnungen synthetisch schreibt:

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{l} t'_m \\ t''_m \end{array}\right\} = -\frac{a}{6E_1 I}\left(\ddot{\mu}_{m-1} + 2\dot{\mu}_m \mp \frac{1}{4} q a^2\right) - \frac{\xi_{m-1} - \xi_m}{a}$$

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} t'_m \\ t''_m \end{array}\right\} = +\frac{a}{6E_1 I}\left(2\ddot{\mu}_m + \dot{\mu}_{m+1} \mp \frac{1}{4} q a^2\right) - \frac{\xi_m - \xi_{m+1}}{a}.$$

Erinnern wir uns, dass nach den Annahmen, welche wir bezüglich der Anwendung der Gleichungen des continuirlichen Trägers auf das Studium der Biegung der Säulen machten, t'_m eine positive Drehung nach rechts, t''_m positiv nach links bedeutet.

Um die Ausdrücke für t'_m (Säule Ω') zu erhalten, gibt man in (1) und (2) den μ und ξ das Zeichen $'$.

Für die Ausdrücke von t''_m (Säule Ω'') gibt man den μ und ξ das Zeichen $''$.

Die allgemeinen Formeln (A) bezüglich eines an den Enden eingespannten Trägers, für das Gleichgewicht der m^{ten} horizontalen Stange angewendet, ergeben ferner:

$$(3)\quad \begin{cases} 1.^a\quad t'_m = +\dfrac{a}{6EY}(\nu''_m + 2\nu'_m) + \dfrac{\eta''_m - \eta'_m}{b} \\[2ex] 2.^a\quad t''_m = +\dfrac{a}{6EY}(\nu'_m + 2\nu''_m) - \dfrac{\eta''_m - \eta'_m}{b}. \end{cases}$$

Eliminirt man nun aus (1) die t'_m und t''_m mittelst (3), summirt die beiden so erhaltenen Gleichungen und führt analog dasselbe für (2) durch, so erhält man die beiden typischen Gleichungen des ersten Systemes, welches die halben Summen der homologen Elemente ξ_{mp}, $\dot{\mu}_{mp}$, $\ddot{\mu}_{mp}$ enthält, Gleichungen, aus denen q und die Differenz $\eta''_m - \eta'_m$ verschwinden.

Ein zweites System zwischen besagten Unbekannten kann man auch vermittelst der (F') erhalten, welche für den vorliegenden Fall angewendet, mit derselben synthetischen Schreibweise, wird:

$$(4)\quad \left.\begin{matrix} X'_m \\ X''_m \end{matrix}\right\} = \frac{-\ddot{\mu}_{m-1} + \dot{\mu}_m + \ddot{\mu}_m - \dot{\mu}_{m+1}}{a} \pm q\,a.$$

Summirt man die beiden (4), so erhält man einen Ausdruck für X_{mp}, aus welchem q verschwindet, und wenn man diesen Ausdruck mit (7) (I. Theil) gleichmacht, welcher nach der Art, in welcher er erhalten wurde, offenbar für unseren Fall anwendbar ist, so gelangt man zur typischen Gleichung des zweiten Systemes zwischen den halben Summen der horizontalen Verschiebungen und der homologen Momente, ein System, in welchem die bekannten Glieder nur als Elemente der Beanspruchung [P] erscheinen, und welches mit dem Vorherstehenden zur Bestimmung der unbekannten halben Summen genügt.

Diese halben Summen sind daher nur von der Beanspruchung auf Zerknicken abhängig, und sind Null, wenn man [P] = 0 voraussetzt, d. h. die Beanspruchung [Q] biegt die Säulen nach gleichen und congruenten Curven.

Nachdem auf diese Art die Richtigkeit des Lehrsatzes bewiesen ist, erinnern wir uns der weiteren Folgerungen, welche wir bezüglich des Systemes von inneren Kräften ableiten, wie auch der Auslegung der Bezeichnungen mit dem Zeiger q, welche wir bei Berechnung der halben Differenzen der homologen Elemente einführen werden, wobei wir die Bezeichnungen (2) annehmen, vervollständigt durch:

$$\nu_{mq} = \nu'_m - \nu''_m = \dot{\mu}_{mq} - \ddot{\mu}_{mq}.$$

§. 3. Allgemeine strenge Lösung der Aufgabe des Gleichgewichtes bezüglich des Umstürzens.

Die Gleichungen des Gleichgewichtes bezüglich der Drehung um den Kreuzungspunkt der m^{ten} geneigten Stangen und des horizontalen Gleichgewichtes, wie im I. Theile, §. 10, erhalten und in gleicher Weise transformirt, resultiren von der Form:

$$(5) \qquad [\Omega_m]_q = \frac{M_m - \ddot{\mu}_{m-1q} - \dot{\mu}_{mq}}{b} = \frac{\mathfrak{M}_m}{b}$$

$$(6) \qquad [\omega_m]_q \cos\gamma = \frac{Q_m a + \mu_{m-1q} - \mu_{mq}}{b} = \frac{\mathfrak{N}_m}{b}.$$

Substituirt man die Ausdrücke der Beanspruchungen in Functionen der Verschiebungen mit (1) I. Th., so erhält man zwei mit (21) und (22) I. Th. analoge Systeme, welche wir in der etwas geänderten Form schreiben:

$$(7) \qquad \frac{\eta_{m-1q} - \eta_{mq}}{b} = \frac{\cot\gamma}{O} \cdot \frac{\mathfrak{M}_m}{b}$$

$$(8) \qquad \frac{\xi_{m-1q} - \xi_{mq}}{a} - \frac{\eta_{m-1q} + \eta_{mq}}{b} = \frac{\cot\gamma}{o} \cdot \frac{\mathfrak{N}_m}{b}.$$

Eliminirt man ferner aus (1) t'_m und t''_m mittelst (3), subtrahirt die beiden so erhaltenen Gleichungen und führt dasselbe analog für (2) aus, so erhält man die beiden allgemeinen typischen Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\xi_{m-1q} - \xi_{mq}}{a} - \dfrac{2\eta_{mq}}{b} = \dfrac{b}{2EY}\nu_{mq} + \dfrac{a}{6E_1I}\left(\ddot{\mu}_{m-1q} + 2\dot{\mu}_{mq} - \dfrac{1}{4}qa^2\right) \\[2ex] \dfrac{\xi_{mq} - \xi_{m+1q}}{a} - \dfrac{2\eta_{mq}}{b} = \dfrac{b}{2EY}\nu_{mq} - \dfrac{a}{6E_1I}\left(2\ddot{\mu}_{mq} + \mu_{m+1q} - \dfrac{1}{4}qa^2\right). \end{cases}$$

Die ersten Glieder dieser Gleichungen kann man eliminiren:

für die 1. (9) mit der Gleichung, welche man durch Summirung von (7) und (8) erhält;

für die 2. (9) mit der Gleichung, welche man durch Subtrahiren von (7) und (8) erhält, und m in $m+1$ umtauscht.

Mit dieser Eliminirung erhält man die beiden allgemeinen typischen Gleichungen, welche die Momente $\dot{\mu}_q$, $\ddot{\mu}_q$ enthalten, ein System, welchem wir noch zu seiner Vervollständigung die (einzige) Gleichung bezüglich der Endfelder hinzufügen; beachtet man:

$$\mathrm{I} = \Omega\, \mathrm{i}^2 \qquad \mathrm{Y} = \varrho\, \mathrm{y}^2,$$

und erweitert man die Bezeichnungen (25) I. Th. in:

$$(10) \qquad \begin{aligned} f_1 &= \frac{\mathrm{b}}{6\mathrm{i}^2} - \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} + 1 \\ f_2 &= \frac{\mathrm{b}^2}{3\mathrm{i}^2} + \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} + 1 \\ f_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{r}} \cdot \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}^2}, \end{aligned}$$

so ergibt sich dieses System, als elegante Verallgemeinerung von (26) I. Th.:

$$(11) \left\{ \begin{array}{llll} f_2\, \ddot{\mu}_{0q} + f_1\, \dot{\mu}_{1q} & = \mathrm{M}_1 & - \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} \mathrm{Q}_1\, \mathrm{a} & + \frac{\mathrm{b}^2}{24\mathrm{i}^2} q\, \mathrm{a}^2 \\ \cdots & & & \\ f_1\, \ddot{\mu}_{m-1q} + (f_2 + f_3)\, \dot{\mu}_{mq} - f_3\, \ddot{\mu}_{mq} & = \mathrm{M}_m & + \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} \mathrm{Q}_m\, \mathrm{a} & + \frac{\mathrm{b}^2}{24\mathrm{i}^2} q\, \mathrm{a}^2 \\ - f_3\, \dot{\mu}_{mq} + (f_2 + f_3)\, \ddot{\mu}_{mq} + f_1\, \dot{\mu}_{m+1q} & = \mathrm{M}_{m+1} & - \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} \mathrm{Q}_{m+1}\, \mathrm{a} & + \frac{\mathrm{b}^2}{24\mathrm{i}^2} q\, \mathrm{a}^2 \\ \cdots & & & \\ f_1\, \ddot{\mu}_{n-1q} + f_2\, \dot{\mu}_{nq} & = \mathrm{M}_n & + \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} \mathrm{Q}_n\, \mathrm{a} & + \frac{\mathrm{b}^2}{24\mathrm{i}^2} q\, \mathrm{a}^2. \end{array} \right.$$

Denkt man sich die horizontalen Stangen nicht eingefügt, so ist leicht zu beweisen, dass, $\dot{\mu}_{mq} = \ddot{\mu}_{mq} = \mu_{mq}$ gesetzt, die beiden allgemeinen typischen Gleichungen (11) summirt, eine Gleichung ergeben,

welche mit der allgemeinen Gleichung (26) I. Th. zusammenfällt, ebenso wie die beiden Endgleichungen (11) mit jenen (26).

Nachdem $\mu_q^{\cdot}$ und $\mu_q^{\cdot\cdot}$ mittelst des Systemes (11) bestimmt sind, geben die früheren Formeln alle anderen unbekannten Elemente der Deformation und des Systemes der inneren Kräfte.

§. 4. Explicite, angenäherte Lösungen.

Bei der Ausführung dieser expliciten Lösungen werden wir die Elemente der Beanspruchung [Q], d. h. das Moment M von den horizontalen Kräften 2 Q und 2 q trennen.

I. Moment M.

Wenn man annimmt, dass die Beanspruchung nur auf das Moment M reducirt ist, so wird allen Gleichungen (11) in strenger Weise durch den einzigen constanten Werth der Unbekannten genügt:

$$\mu_q^{\cdot} = \mu_q^{\cdot\cdot} = \frac{2\,i^2}{b^2 + 4\,i^2}\,M, \tag{12}$$

eine Lösung, welche mit jener bezüglich des gewöhnlichen Pfeilers (§. 13, I. Th., Formel [27′]) gleich ist, und zeigt, dass bezüglich dieses Theiles der Beanspruchung die Wirkung der Befestigung der horizontalen Stangen Null ist. Dieses Resultat ist auch klar, wenn man die vom Momente M hervorgebrachte kreisförmige Biegung des Pfeilers und die radiale Lage bedenkt, welche die befestigten Stangen annehmen.

In diesem Falle sind auch die Beanspruchungen aller Stangen des Gitterwerkes gleich Null.

II. Kräfte 2 Q und 2 q.

Der Einfachheit halber werden wir nur die Kraft 2 Q in Rechnung ziehen, weil die explicite Lösung der allgemeinen Gleichungen (11), welche wir analog mit der Untersuchung im §. 13, I. Th., geben werden, in Bezug auf dieses Element genau ist, dagegen für q nur dann, wenn man einige Glieder vernachlässigt. Man kann aber in Anbetracht des angenäherten Charakters der Formeln in denselben Q_m für Q substituiren.

Setzt man also die äussere Beanspruchung auf 2 Q reducirt voraus, so nehmen die allgemeinen Gleichungen (11) die Form an:

$$(11') \quad \begin{aligned} f_1 \ddot{\mu}_{m-1q} + (f_2+f_3)\dot{\mu}_{mq} - f_3 \ddot{\mu}_{mq} &= \left(2m + \frac{O}{o} - 1\right) Q a \\ - f_3 \dot{\mu}_{mq} + (f_2+f_3)\ddot{\mu}_{mq} + f_1 \dot{\mu}_{m+1q} &= \left(2m - \frac{O}{o} + 1\right) Q a, \end{aligned}$$

und denselben genügen die folgenden Ausdrücke:

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{\mu}_{mq} &= \frac{4 m i^2 + \lambda b^2}{4 i^2 + b^2} Q a \\ \ddot{\mu}_{mq} &= \frac{4 m i^2 - \lambda b^2}{4 i^2 + b^2} Q a, \end{aligned}$$

wobei:

$$(14) \quad \lambda = \frac{\frac{O}{o} - \frac{1}{3}}{\frac{b^2}{6 i^2} + 2\frac{O}{o} + \frac{O}{r} \cdot \frac{a^2}{y^2}}.$$

(13) gibt eine bedeutend besser angenäherte Lösung, als die analoge für den gewöhnlichen Pfeiler (§. 13, I. Th.). Thatsächlich befinden sich die mittleren befestigten Querschnitte gegenüber den äusseren in nicht so unähnlichen Bedingungen wie bei dem gewöhnlichen Pfeiler, und die (13) würden in den folgenden Fällen vollkommen genaue Ausdrücke sein.

1. Wenn man noch die Endquerschnitte mit biegsamen Stangen vom Trägheitsmomente $\frac{1}{2}Y$ verbunden annimmt, von welchen die obere beweglich, die untere dagegen zwar in den Endpunkten befestigt, sich doch frei biegen kann. Bei dieser Annahme kann man leicht zeigen, dass sich die Endgleichungen des Systemes (11) in der Form ergeben:

$$(11'') \quad \begin{aligned} (f_2 + 2 f_3)\ddot{\mu}_{0q} + f_1 \dot{\mu}_{1q} &= \left(\quad - \frac{O}{o} + 1\right) Q a \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1 \ddot{\mu}_{n-1q} + (f_2 + 2 f_3)\dot{\mu}_{nq} &= \left(2n + \frac{O}{o} - 1\right) Q a \end{aligned}$$

und denselben von (13) genau entsprochen wird.

2. Wenn man alle eingefügten horizontalen Stangen nicht deformirbar, wie den Pfeilerkopf, annimmt, eine Bedingung, welche man in den

obigen Formeln ausdrücken kann, indem man $y = \infty$ setzt, so erhält man dann:

$$(14') \qquad f_s = 0 \qquad \lambda = \lambda_\infty = \frac{\frac{O}{o} - \frac{1}{3}}{\frac{b^2}{6i^2} + 2\frac{O}{o}},$$

mit welchen Werthen man leicht zeigen kann, dass die (13) allen Gleichungen des Systemes (11) bezüglich Q in strenger Weise genügen.

Den Werth λ_∞ kann man auch annäherungsweise in (13) substituiren und erhält daraus die Momente in den Endquerschnitten $\mu_{\ddot{o}q}$ und $\mu_{\dot{m}q}$ für den wirklich praktischen Fall, wo nur die Endquerschnitte mit undeformirbaren Körpern verbunden angenommen werden müssen[1]). Diese Art der Befestigung vermehrt den Werth der Biegungsmomente in besagten Querschnitten, und thatsächlich ist immer $\lambda_\infty > \lambda$.

3. Schliesslich würde (13) die strenge Lösung der Aufgabe ergeben, ohne weitere Annahmen, wenn die Bedingung $\lambda = 0$, d. h. $o = 3\,O$, erfüllt wäre.

Wir haben diese Bedingung schon für den gewöhnlichen Pfeiler (§. 13) gefunden, damit (27') auch für die Endquerschnitte anwendbar wäre, in welchem Falle das Moment im oberen Querschnitte Null resultirt. Hier wird das Resultat verallgemeinert in dem Sinne, dass die Wirkung der Befestigung, sei es der Säulen im Pfeilerkopfe oder jene der horizontalen Stangen, wenn obige Bedingung gilt, gleich Null resultirt, und wird also:

$$\mu_{\ddot{o}q} = 0 \qquad \nu_{mq} = 0.$$

Der Pfeiler würde sich ohne Flexionspunkte seitlich biegen wie in Fig. 11, dagegen würden sich die eingefügten Stangen normal zu den

---

[1]) Die aus (13) durch Einsetzen von λ_∞ erhaltenen Ausdrücke für die äusseren Biegungsmomente können auch auf den gewöhnlichen Pfeiler ausgedehnt werden und als Grenzwerthe für die besagten Momente gelten, welche auf keinen Fall überschritten werden dürfen; damit wird auch die Lösung des §. 13 vervollständigt. Dass solche Ausdrücke für den gewöhnlichen Pfeiler immer grössere Werthe als die wirklichen ergeben, ist leicht einzusehen, wenn man die Art der Deformirung bedenkt. So würde man für das numerische Beispiel des §. 14 erhalten:

$$\mu_{oq} = -\,0{,}055\ Q\,a$$
$$\mu_{mq} = +\,0{,}084\ Q\,a.$$

beiden parallelen Curven der Säulenachsen anordnen. Wir erinnern, dass die erwähnte Bedingung gänzlich über die Grenzen von constructiven Angaben hinausgeht.

Wir wollen nun eingehender die Bedeutung von (13) und die interessanten Schlussfolgerungen untersuchen, welche sich daraus ableiten lassen.

Summirt geben die (13):

(15) $\dot{\mu}_{mq} + \ddot{\mu}_{mq} = \frac{4i^2}{4i^2 + b^2} 2Q m a$; diese Summe setzen wir $= 2\mu_{mq}$,

wobei μ_{mq} das Moment bedeutet, welches im m^{ten} Knotenpunkte wirken würde, wenn keine Befestigung vorhanden wäre; den Einfluss der letzteren kann man sich klar bestimmen, wenn man (13) in folgender Form schreibt:

$$\left.\begin{matrix}\dot{\mu}_{mq}\\ \ddot{\mu}_{mq}\end{matrix}\right\} = \mu_{mq} \pm \frac{\lambda b^2}{b^2 + 4i^2} Q a,$$

Das Moment $\dot{\mu}_{mq}$, oberhalb dem m^{ten} Knotenpunkte, ist immer positiv, das Moment $\ddot{\mu}_{mq}$ im unteren Querschnitte kann negativ resultiren für kleine Werthe von m, d. h. im oberen Theile des Pfeilers, oder für grosse Werthe von λ, das ist von dem Trägheitsmomente Y. Das Moment für den im Pfeilerkopfe befestigten Querschnitt ist immer negativ[1]).

Subtrahirt man die (13), so ergibt sich:

$$(16) \qquad \nu_{mq} = \frac{\lambda b^2}{b^2 + 4i^2} 2Qa = \text{constant},$$

dieses ist das für alle Knotenpunkte constante Moment, mit welchem die horizontalen eingefügten Stangen reagiren; dasselbe wächst mit λ, d. h. mit y, und variirt nach verschiedenen Gesetzen je nach der Veränderung der anderen geometrischen Elemente. Wir unterlassen der Kürze halber diese einfache Untersuchung.

Mittelst (13) wird (5):

$$(17) \qquad [\Omega_m]_q = \frac{b^2}{b^2 + 4i^2} \cdot \frac{M_m}{b},$$

---

[1]) Wir erinnern, dass sich nach den Beziehungen (2) I. Th. die Ausdrücke: **positiv**, **negativ** auf die linke Säule beziehen.

d. h. die Beanspruchungen der Säulentheile sind von der Befestigung unabhängig.

Dieses ist für die Beanspruchungen der geneigten Stangen dagegen nicht der Fall, für welche (6) mit (13) ergibt:

$$[\omega_m]_q = \frac{b^2}{b^2 + 4\,i^2} \frac{(1 - 2\lambda)\,Q}{\sin\gamma}, \tag{18}$$

ein Werth, welcher aber von jenem bezüglich des gewöhnlichen Pfeilers wenig verschieden ist, nachdem λ im Allgemeinen einen sehr kleinen Werth hat.

Einen wichtigen Anhaltspunkt für die Construction kann man aus (16) und (18) erhalten. Die specifische Beanspruchung der m^{ten} geneigten Stangen resultirt aus (18):

$$R_2 = \varphi \frac{(1 - 2\lambda)\,Q}{\omega \sin\gamma},$$

wobei φ das im I. Th. (29) definirte Verhältnis bedeutet. Nimmt man an, dass die horizontalen Stangen aus doppelten T-Trägern von der Höhe $2\mathrm{y}$ bestehen, so ist die specifische Maximal-Beanspruchung derselben in Folge der Biegung:

$$R_3 = \frac{\nu_q}{\varrho\,\mathrm{y}} = \varphi \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{y}} \cdot \frac{2\lambda Q}{\varrho}.$$

Man erhält daher:

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{o}} \cdot \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{a}} \cdot \frac{1 - 2\lambda}{2\lambda} \sin^2\gamma. \tag{19}$$

Aus (19) kann man schliessen, dass in den Grenzen der gewöhnlichen Angaben R_2 immer bedeutend grösser als R_3 ist. Nehmen wir thatsächlich an:

$$\gamma = 45^0,\ \mathrm{y} = \frac{1}{10}\,\mathrm{a},\ \mathrm{i} = \frac{1}{20}\,\mathrm{a},\ \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{o}} = 10,\ \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}.$$

Mit diesen Angaben, welche bezüglich des Widerstandes der geneigten Stangen ausserordentlich günstig sind, derart, dass selbe den Widerstand der Pfeiler in Folge der Continuität der Säulen und

der festen Einfügung der horizontalen Stangen vermehren, erhält man trotzdem:

$$\lambda = 0{,}052 \qquad \frac{R_2}{R_3} = 8{,}6.$$

Wir können daher sicher sein, dass selbst unter den günstigsten Annahmen die Beanspruchungen der geneigten Stangen durch die Anwesenheit der horizontalen, eingefügten Glieder nicht wesentlich vermindert werden. Dieses letztere Element des Widerstandes erfordert, um wirksam in's Spiel treten zu können, eine derartige Deformation, dass ein Zerreissen der geneigten Stangen vorausgesetzt werden muss, welches auch als erste Ursache für den Zusammenbruch des Pfeilers durch Umstürzen betrachtet werden muss[1].

Will man auf den Widerstand der horizontalen, eingefügten Glieder rechnen, so ist es gut, denselben ein sehr bedeutendes Trägheitsmoment zu geben, oder noch besser, in Anbetracht der Inanspruchnahme auf Biegung, ein variables, gegen die Enden wachsendes Trägheitsmoment nach den in Fig. 30 und 31 gezeichneten Typen.

Zahlenbeispiel.

Um zu zeigen, wie weit die angenäherte Lösungsmethode von der strengen abweicht, für einen Pfeiler von geringer Felderzahl, werden die folgenden Werthe der Biegungsmomente dienen, welche nach beiden Methoden für einen Pfeiler von nur vier Feldern gerechnet sind.

Für Ω, ω, a, b, i dieselben Daten des §. 8, I. Th., angenommen, und

$$\frac{O}{r} = 1 \qquad y = \frac{1}{20}\,a$$

gesetzt, erhält man:

$$\lambda = 0{,}0106 \qquad \lambda_\infty = 0{,}0565$$

und daher für das System der Biegungsmomente:

---

[1]) Wenn man ferner beachtet, dass die geneigten Stangen keinen Widerstand auf Druck leisten oder derselbe durch anfängliche Spannungen eliminirt werden kann, so muss man die Beanspruchung auf Zug einer Stange mindestens doppelt so gross nehmen, als dieselbe durch die Formeln dieser Abhandlung angegeben wird.

Werthe der Momente in Functionen von Q a		Strenge Lösung (System [11])		Angenäherte Lösung (Formeln [13])	
$\ddot{\mu}_{0q} =$	.....	$-$ 0,0403	......	$-$ 0,0562	
$\dot{\mu}_{1q} =$	.....	$+$ 0,0301	......	$+$ 0,0147	
	$\nu_{1q} =$	......	$+$ 0,0200	......	$+$ 0,0211
$\ddot{\mu}_{1q} =$	.....	$-$ 0,0101	......	$-$ 0,0064	
$\dot{\mu}_{2q} =$	.....	$+$ 0,0194	......	$+$ 0,0189	
	$\nu_{2q} =$	......	$+$ 0,0186	......	$+$ 0,0211
$\ddot{\mu}_{2q} =$	.....	$+$ 0,0008	......	$-$ 0,0022	
$\dot{\mu}_{3q} =$	.....	$+$ 0,0260	......	$+$ 0,0231	
	$\nu_{3q} =$	......	$+$ 0,0118	......	$+$ 0,0211
$\ddot{\mu}_{3q} =$	.....	$-$ 0,0142	......	$+$ 0,0020	
$\dot{\mu}_{4q} =$	.....	$+$ 0,0511	......	$+$ 0,0729	

Aus der vorstehenden Tabelle ersieht man, wie für den befestigten Querschnitt 2, welcher sich in der Mitte der Höhe des Pfeilers befindet, sich die aus den beiden Lösungen erhaltenen Werthe für die Biegungsmomente schon bemerkenswerth annähern.

Man beachte, dass die Werthe für die äusseren Biegungsmomente $\ddot{\mu}_{0q}$ und $\dot{\mu}_{4q}$ für die angenäherte Lösung mit λ_{∞} berechnet sind, da die Werthe λ viel kleinere Momente ergeben würden.

§. 5. Zusammenbruch des Pfeilers in Folge von Zerreissen der geneigten Stangen.

Wir werden jetzt die Aufgabe des Gleichgewichtes des Pfeilers unter der Annahme durchführen, dass bei Hinweglassung aller geneigten Stangen, jener nur auf die Säulen reducirt sei, welche durch horizontale eingefügte Stangen verbunden sind. Die Behandlung des Falles, bei welchem die geneigten Stangen in einigen Feldern fehlen, kann analog durchgeführt werden, indem man die Formeln der beiden Untersuchungen combinirt.

Nachdem durch das Moment M keine Beanspruchung der geneigten Stangen hervorgebracht wird und die diesbezügliche Untersuchung auch in diesem Falle mit jener schon früher gegebenen zusammenfällt, so werden wir nur 2 Q in Betracht ziehen.

Wenn ω und daher o Null ist, reducirt sich (11') auf:

$$(20)\quad \begin{aligned} -\ddot{\mu}_{m-1q} + \dot{\mu}_{mq} &= Qa \\ \ddot{\mu}_{mq} - \dot{\mu}_{m+1q} &= -Qa. \end{aligned}$$

Vom Vorzeichen abgesehen, fallen diese Gleichungen zusammen und drücken nichts Anderes aus, als dass die Beanspruchungen auf Abscheerung in den Säulen 2 Q das Gleichgewicht halten, was man auch aus (6) erhalten kann.

Die Formeln bezüglich der angenäherten Lösung transformiren sich wie folgt.

(14) reducirt sich auf:

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

und daher wird (13):

$$(21)\quad \begin{aligned} \dot{\mu}_{mq} &= \frac{4 m i^2 + \frac{1}{2} b^2}{4 i^2 + b^2} Qa \\ \ddot{\mu}_{mq} &= \frac{4 m i^2 - \frac{1}{2} b^2}{4 i^2 + b^2} Qa. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke entsprechen der Bedingung (20). Ferner:

$$(22)\quad \nu_{mq} = \frac{b^2}{b^2 + 4 i^2} Qa = \text{constant}.$$

Diese Formeln, welche die strenge Lösung der Aufgabe für den Fall ergeben, dass man alle eingefügten Stangen, ebenso wie den Pfeilerkopf, nicht deformirbar voraussetzt, als angenäherte Formeln für den wirklichen Fall der eingefügten, elastischen Stangen ausgedehnt, würden zeigen, dass das ganze System von Beanspruchung der Pfeiler auf Biegung unabhängig ist vom Trägheitsmomente Y jener Stangen.

Nachdem wir dieses etwas paradoxe Resultat später einer Besprechung unterziehen werden, wollen wir jetzt auf directem Wege zeigen[1]), dass (21) und (22) wirklich für diesen Fall die angenäherte Lösung ergeben, analog mit jener, welche man aus (13) und (16) für den vorigen Fall erhält.

---

[1]) Hierbei ist angenommen, dass auch bei fehlenden geneigten Stangen die Gesetze für die Deformation dem Fundamental-Lehrsatze entsprechen. Dies lässt sich durch eine Reihe von Schlussfolgerungen, analog den schon früher erwähnten, beweisen.

Ein System, welches nur die Biegungsmomente der Stange ν_{mq} enthält, kann in diesem Falle aus (9) gefunden werden, wenn man die Gleichung berücksichtigt:

$$(23) \qquad - \ddot{\mu}_{m-1q} + \dot{\mu}_{mq} + \ddot{\mu}_{mq} - \dot{\mu}_{m+1q} = 0,$$

welche man aus (20) durch Summirung der beiden Gleichungen ableitet.

Subtrahirt man die zweite Gleichung (9) von der homologen, welche man aus ersterer erhält, wenn man m in $m-1$ umtauscht, und zieht (23) in Rechnung, so ergibt sich:

$$(24) \quad 1^a. \; \frac{\xi_{m-1q} - 2\xi_{mq} + \xi_{m+1q}}{a} - 2\frac{\eta_{m-1q} - \eta_{mq}}{b} =$$
$$= \frac{b}{2EY}(\nu_{m-1q} - \nu_{mq}) + \frac{a}{2E_1I}(Qa - \nu_{mq}).$$

Subtrahirt man von der ersten Gleichung (9) die homologe, welche man durch Vertauschung von m in $m+1$ erhält, so ergibt sich:

$$(24) \quad 2^a. \; \frac{\xi_{m-1q} - 2\xi_{mq} + \xi_{m+1q}}{a} - 2\frac{\eta_{mq} - \eta_{m+1q}}{b} =$$
$$= \frac{b}{2EY}(\nu_{mq} - \nu_{m+1q}) - \frac{a}{2E_1I}(Qa - \nu_{mq}).$$

Ferner erhält man aus (7) mittelst (23):

$$(25) \qquad \frac{\eta_{m-1q} - 2\eta_{mq} + \eta_{m+1q}}{b} = \frac{2\cot\gamma}{O} \cdot \frac{Qa - \nu_{mq}}{b}.$$

Eliminirt man die ξ_q aus (24) durch Subtrahiren derselben und dann aus der resultirenden Gleichung die η_q mittelst (25), so erhält man die allgemeine Gleichung für das System von $n-1$ Gleichungen, welche die $n-1$ Unbekannten ν_q enthalten; nimmt man die Bezeichnungen (10) an und beachtet:

$$2(f_1 + f_2) = \frac{b^2}{i^2} + 4,$$

so schreibt sich dieses System in seiner completen Form:

$$2(f_1 + f_2 + f_3)\,\nu_{1q} - f_3\nu_{2q} = \frac{b^2}{i^2}Qa$$

. . . .

$$(26) \qquad - f_3\nu_{m-1q} + 2(f_1 + f_2 + f_3)\,\nu_{mq} - f_3\nu_{m+1q} = \frac{b^2}{i^2}Qa$$

. . . .

$$- f_3\nu_{n-2q} + 2(f_1 + f_2 + f_3)\,\nu_{n-1q} = \frac{b^2}{i^2}Qa.$$

Man kann jetzt leicht beweisen, dass der allgemeinen Gleichung (26) durch den von (22) gegebenen, constanten Werth von ν_q entsprochen wird.

Subtrahirt man die beiden Gleichungen (9) und berücksichtigt (23), so erhält man:

$$\xi_{m-1q} - 2\,\xi_{mq} + \xi_{m+1q} = \frac{a^2}{2\,E_1 I}\,(\dot{\mu}_{mq} + \ddot{\mu}_{mq}). \tag{27}$$

Wenn man die beiden Gleichungen (24) nach Substituirung von (22) für ν_q summirt und dann die ξ_q aus der so erhaltenen Gleichung und aus (27) eliminirt, so erhält man nach durchgeführter Reducirung:

$$\dot{\mu}_{mq} + \ddot{\mu}_{mq} = \frac{4\,i^2}{4\,i^2 + b^2}\,2\,Q\,m\,a,$$

eine mit (15) identische Gleichung, welche mit (22) zusammen zeigt, dass (21) wirklich die angenäherte Lösung der Aufgabe darstellt, wenn man die horizontalen eingefügten Stangen als elastisch annimmt.

Bezüglich des in dieser Lösung enthaltenen Widerspruches bemerken wir vor Allem, dass der Coëfficient f_3, respective das Trägheitsmoment Y, nachdem den Endgleichungen (26) von (22) nicht vollkommen entsprochen wird, einen gewissen Einfluss auf die Werthe von ν_q ausüben wird, welcher aber für die Werthe der eingespannten Querschnitte, die von den Enden entfernt sind, verschwindet.

Das Paradoxon bleibt aber immer, weil diese explicite Lösung nicht nur für den Fall der eingefügten, nicht deformirbaren Stangen in strenger Weise giltig ist, sondern es auch für den Fall der elastischen Stangen sein würde, falls man die Endquerschnitte mit Stangen vom Trägheitsmomente $\frac{1}{2}$Y verbunden annimmt. Unter dieser Voraussetzung würde die erste Gleichung (26) die Form annehmen:

$$+\,2\,f_3\,\ddot{\mu}_{0q} + 2\,(f_1 + f_2 + f_3)\,\nu_{1q} - f_3\,\nu_{2q} = \frac{b^2}{i^2}\,Q\,a, \tag{26'}$$

welcher von (21) und (22) genügt wird[1]). Der analoge Fall findet für die letzte Gleichung (26) statt.

---

[1]) Dies würde aber, strenge genommen, kein genügender Beweis sein, dass die (21) bei dieser Annahme die strenge Lösung der Aufgabe darstellen, weil das System (26) mit der Endgleichung (26′) aus $n-1$ Gleichungen besteht, die $n-1$ ν_q und die beiden $\ddot{\mu}_{0q}$ und $\dot{\mu}_{nq}$ enthält. Man kann aber leicht zeigen, dass die (21) für irgend eine aus den (15) abgeleitete Bedingung gelten, wenn man letztere mit Berücksichtigung der speciellen Bedingungen der Befestigung an den Enden schreibt.

Die Ursache für das Paradoxe dieses Resultates liegt darin, dass, wenn auch die geneigten Stangen fehlen, 2 Q durch die Inanspruchnahmen der Säulen auf Abscheerung vollkommen das Gleichgewicht gehalten wird, der Werth von jenen ist daher bestimmt. Die vorstehende explicite Lösung sagt, dass es für die Bestimmung des Systemes der Beanspruchung des Pfeilers auf Biegung genügt, wenn sich alle befestigten Querschnitte unter denselben Bedingungen befinden, entweder dass alle Stangen nicht deformirbar oder dass alle biegsam vorausgesetzt sind.

Das System der Beanspruchungen auf Biegung resultirt unabhängig vom Trägheitsmomente Y, aber dafür ist von Y die Art der seitlichen Biegung des Pfeilers abhängig, d. h. der Werth der Verschiebungen ξ_q, welche man aus (9) bestimmen kann.

Diese Bestimmung kann man durchführen mit Benützung der $n-1$ Gleichungen der Form (27), welche sich aus den $n-1$ paarweisen mittleren Gleichungen (9) ableiten, ferner von der ersten Gleichung (9), worin n statt m gesetzt, oder von der zweiten Gleichung (9), worin $m=0$ gesetzt ist (und mit Berücksichtigung der Bedingungen für die Befestigung an den Enden).

Durch Einführung der ersten Gleichung resultirt das System, welches in strenger Weise die ξ_q unter der Voraussetzung von eingefügten, elastischen Stangen bei allen Querschnitten ergibt, die Endgleichungen inbegriffen, von folgender Form:

$$\xi_{0q} - 2\xi_{1q} + \xi_{2q} = \frac{a^2}{2E_1 I}(\dot{\mu}_{1q} + \ddot{\mu}_{1q})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(27') \quad \xi_{m-1q} - 2\xi_{mq} + \xi_{m+1q} = \frac{a^2}{2E_1 I}(\dot{\mu}_{mq} + \ddot{\mu}_{mq})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{n-1q} = \frac{a^3}{6E_1 I}(\ddot{\mu}_{n-1q} + 2\dot{\mu}_{nq}) + \frac{ab}{EY}\dot{\mu}_{nq},$$

dies ergibt mit (21) das folgende System, welches durch aufeinander folgende Summirung oder Subtrahirung leicht gelöst werden kann:

$$\xi_{0q} - 2\xi_{1q} + \xi_{2q} = \frac{a^2}{b^2+4i^2}\cdot\frac{1}{O}Qa$$

. . . .

$$\xi_{m-1q} - 2\xi_{mq} + \xi_{m+1q} = \frac{a^2}{b^2+4i^2}\cdot\frac{m}{O}Qa \tag{27''}$$

. . . .

$$\xi_{n-1q} = \frac{a^2}{b^2+4i^2}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{a^2}{y^2}\left(4n\frac{i^2}{b^2}+\frac{1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{O}\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{b^2}{i^2}+2n-\frac{2}{3}\right)\right]Qa.$$

Wenn man dagegen alle Stangen als nicht deformirbar annimmt, so genügt es, in der letzten Gleichung $y = \infty$ zu setzen.

Aus (27′) ist leicht abzuleiten, dass der Werth von ξ_{mq} im ersten Falle den correspondirenden Werth im zweiten Falle übersteigt, um die Grösse:

$$(n-m)\,a\frac{b}{Ey}\,\dot{\mu}_{nq} = (n-m)\,a t_{nq},$$

wobei mit t_{nq} der Winkel bezeichnet ist, um welchen sich der untere befestigte Querschnitt dreht (Fig. 33).

Die Deformation der Säulen ist in beiden Fällen gleich, aber bei der Annahme der elastischen Stangen erleiden die Säulen nebst der Deformirung noch eine Drehung um den Winkel t_{nq} wegen der Elasticität der unteren Befestigung.

Bei Annahme von nicht deformirbaren Stangen und einer Befestigung an der Basis in einer fixen Ebene findet die Deformation wie in Fig. 32 statt.

Bei Annahme von elastischen Stangen und den schon definirten Bedingungen für die Befestigung an den Enden findet die Deformation wie in Fig. 33 statt.

So ist das Paradoxon der Gleichheit der Inanspruchnahmen auf Biegung in beiden Fällen vollkommen aufgeklärt.

Wenn man nur die Ebene für die Befestigung an der Basis und den Pfeilerkopf als nicht deformirbar voraussetzt, so bleibt die Deformirung des mittleren Theiles des Pfeilers in der Art, dass die

Deformation in den Endfeldern nahezu wie in Fig. 32 gezeichnet, und jene der successive anliegenden Felder wie in Fig. 33 erfolgt. Der Uebergang der einen Art der Deformation in die andere bestimmt die Störung, welche durch die verschiedene Befestigung erzeugt wird.

Dasselbe besagen auch die Werthe der ξ_q bezüglich der beiden Serien von Werthen dieser Grösse, welche unter beiden Annahmen aus dem Systeme (27″) erhalten werden.

Wenn man mit berechtigter Analogie[1]) diese Resultate auch für den Fall eines Pfeilers ausdehnt, bei welchem das Zerreissen irgend einer geneigten Stange stattfand, so können wir feststellen:

In Folge von Zerreissen einer oder mehrerer geneigter Stangen (erste Erscheinung von Beschädigung, welche [Q] an dem Pfeiler hervorbringt):

A. biegt sich der Pfeiler seitlich, abhängig von Y, bis zu einem solchen Grade, dass das mit (21) und (22) definirte System von Biegungsmomenten hervorgerufen wird;

B. wenn aber das Trägheitsmoment Y der Stangen nicht derart ist, dass es dem Biegungsmomente ν_q widerstehen kann, so tritt der Zusammensturz des Pfeilers in Folge des Bruches der horizontalen, eingefügten Stangen ein;

C. ist aber die besagte Bedingung erfüllt, so widersteht der Pfeiler, so lange er nicht durch einen Bruch der Säulen zusammenstürzt.

Die Bedingungen, unter welchen einer dieser Fälle eintritt, sind durch die specifischen Maximal-Beanspruchungen der verschiedenen Theile des Pfeilers gegeben.

Die Maximal-Beanspruchung im Querschnitte der Befestigung der horizontalen Stange resultirt mit:

$$R_3 = \frac{\nu_q}{\varrho y} = \frac{b^2}{b^2 + 4i^2} \cdot \frac{a}{y} \cdot \frac{Q}{\varrho}. \tag{28}$$

---

[1]) Der Theil des Pfeilers, bei welchem die geneigten Stangen fehlen, befindet sich thatsächlich unter statischen Bedingungen, welche sich sehr jenen des in Fig. 33 dargestellten Systemes nähern.

Die Maximal-Beanspruchung im m^{ten} Säulentheile, welche voraussichtlich oberhalb des m^{ten} befestigten Querschnittes stattfindet, resultirt bei Annahme eines vollen und kreisförmigen Querschnittes mit:

$$(29) \quad R_1 = \frac{[\Omega_m]_q}{\Omega} + \frac{2\dot{\mu}_{mq}}{\Omega i} = \frac{2m(b+4i)i+(b-i)b}{b^2+4i^2} \cdot \frac{a}{i} \cdot \frac{Q}{\Omega}.$$

In Folge von Zerreissen der geneigten Stangen, das entscheidende Moment für den Zusammenbruch der Pfeiler, kann erfolgen:

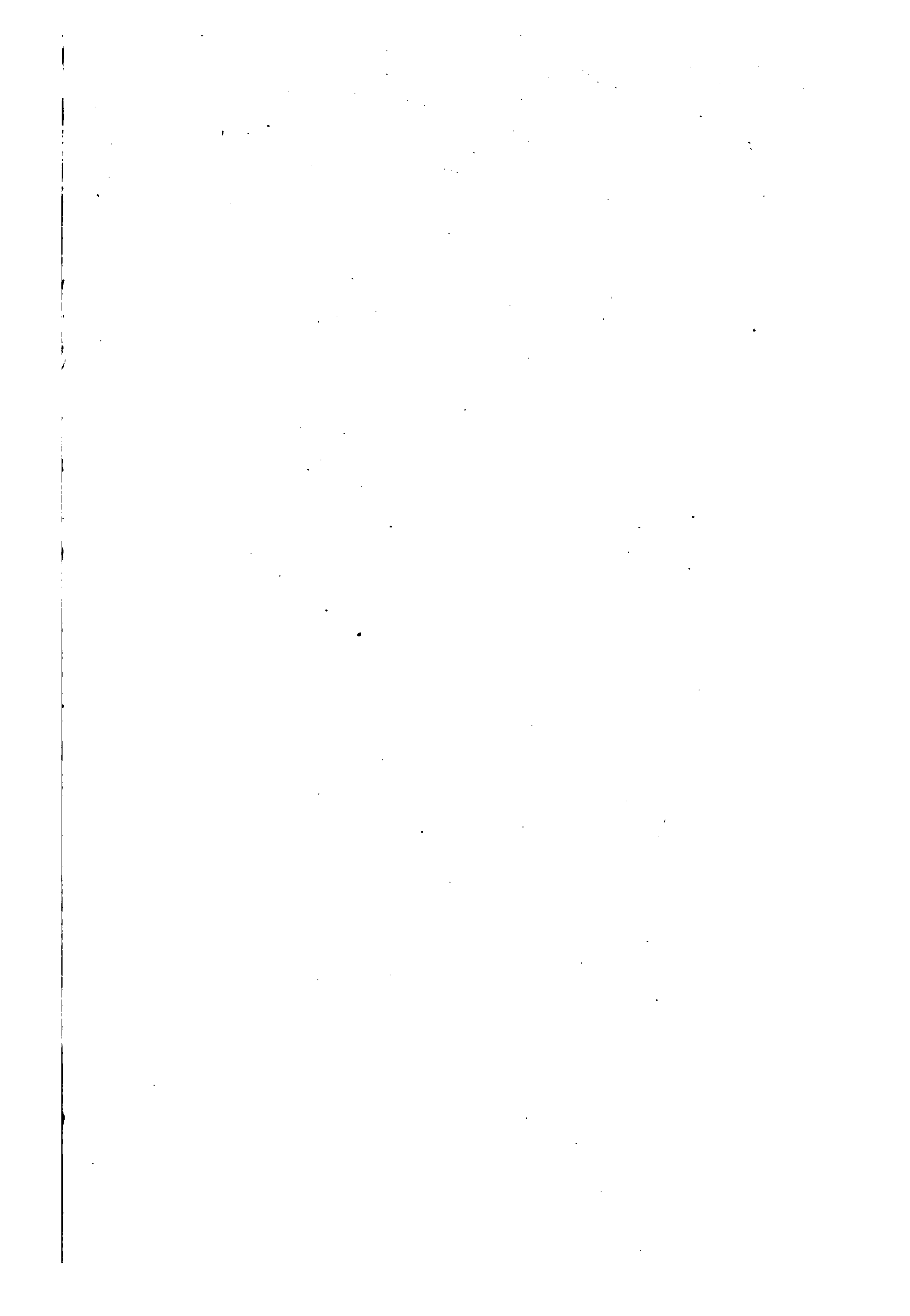
der Bruch einer eingefügten Stange, nahe bei dem Querschnitte der Befestigung (Fig. 34);

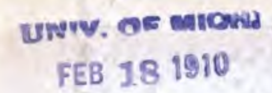
der Bruch einer Säule (voraussichtlich Ω') oberhalb eines Knotenpunktes (Fig. 35);

je nachdem R_3 oder R_1 die Bruchbelastung des Materiales übersteigen, aus welchem die Stangen und Säulen erzeugt sind.

Die Dimensionen der eingefügten Stangen wird man daher auf Grund von (28) und jene der Säulen mit (29) bestimmen, wobei man aber auch die anderen Elemente der äusseren Beanspruchung berücksichtigt.

Inhalt.







Verlag von **Carl Gerold's Sohn** in Wien.

Evans, F. J., und **Smith**, Arch., über die Deviationen des Compasses, welche durch das Eisen eines Schiffes verursacht werden. Nach dem Engl. bearb. von Dr. F. Schaub. Mit eingedruckten Holzschn. und 6 lithogr. Tafeln. gr. 8". [152 S.] 5 M.

Fink, P., Construction der Ma... ...theile. Mit 25 Tafeln und vielen Holzschnitt... ...S.] 12 M.

Gentill... ...odäsie mit Hinblick auf ... ...n. Mit 4 Tafeln. Lex.-8". 1 M.

... ...rath. ordentl. öffentl. ... ...rojective Geometrie ... Wissenschaft mit ... ...rer Lehranstalten ... Bogen Text und ... Querfolio mit ... ..., jetzt 32 ...

...lossenes ...
...hun...

Sella, ...
Ve...
von ...

West, L...
Beweis...

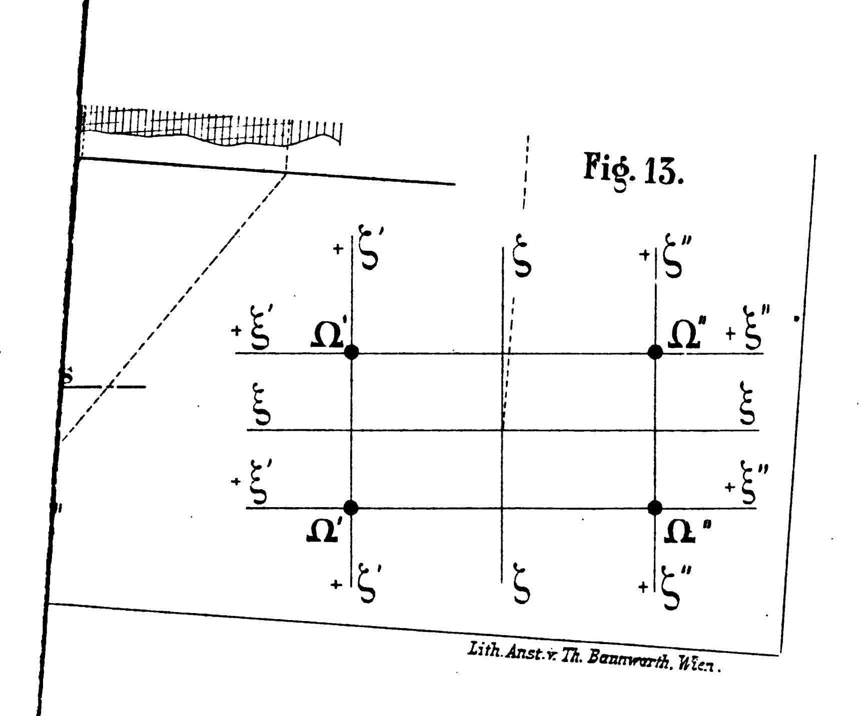
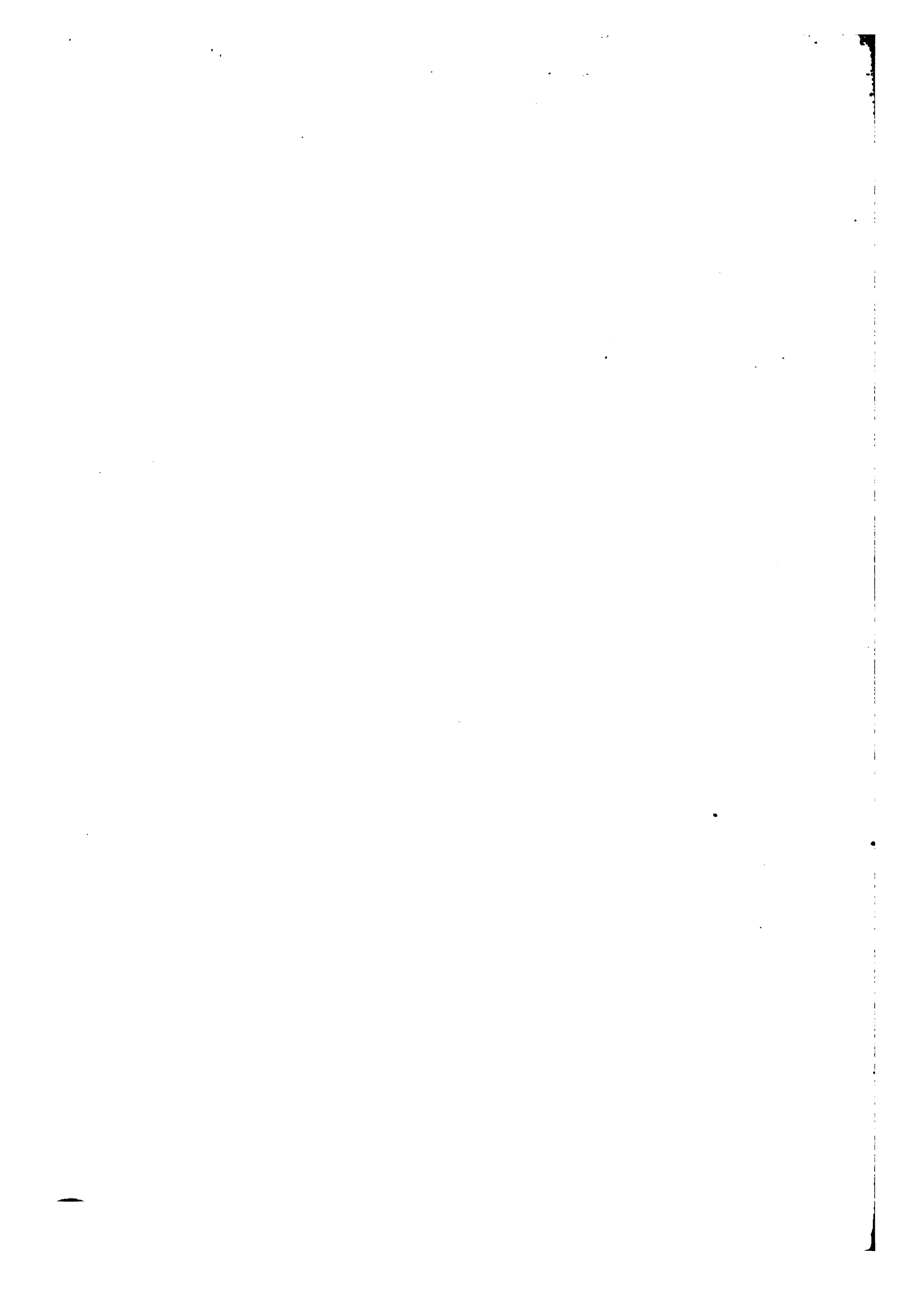
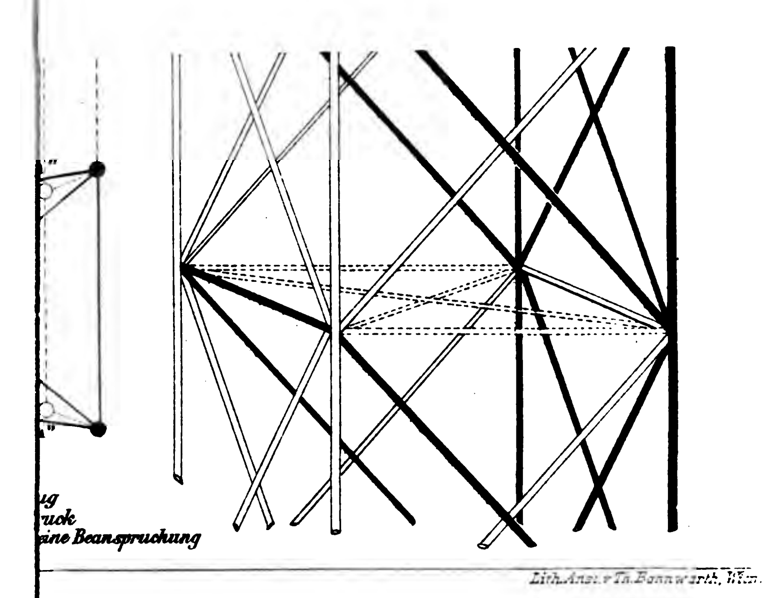


Fig. 13.

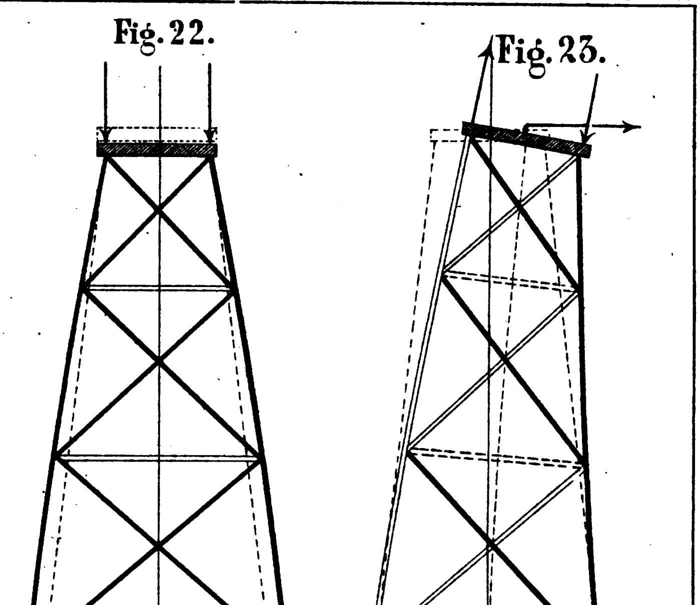
Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.





Lith.Anst.v Th.Bannwarth, Wien.

TAF. V.



TAF. VI.

Fig. 26.

TAF. VII.

